

DER VERBAND DER β REKURSIV
AUFZÄHLBAREN MENGEN

K. Sutner

*Diss
München
1904*

DER VERBAND DER

β REKURSIV AUFGÄHLBAREN MENGEN

Dissertation der Fakultät fuer Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften.

Vorgelegt von : K. Sutner

Eingereicht am : 4.7.1983

1. Berichterstatter : Prof. W. Maass
2. Berichterstatter : Prof. W. Pohlers

Tag der muendlichen Pruefung : 5.7.1984

DISSERTATIONS - UND FOTODRUCK FRANK GmbH
8000 München 2, Gabelsbergerstraße 15, Tel. 2809090

ERKLAERUNG

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbststaendig angefertigt und keine ausser den im Literaturverzeichnis angefuhrten Quellen verwendet habe.

Berkeley, den 5. Februar 1983

(Klaus Sutner)

INHALTSVERZEICHNIS

	Einleitung	v
0.	Grundlagen	
0.0	Definitionen, Feinstrukturtheorie von L	1
0.1	Reflexion fuer L_β	9
0.2	1-Endlichkeit	17
1.	Der weakly admissible Fall	
1.0	Der Maass-Kollaps	22
1.1	Maximale Mengen	26
1.2	Isomorphietypen von $\mathcal{E}_\mu(X)$	28
2.	Der strongly inadmissible Fall	
2.0	1-finite und duenne Mengen	30
2.1	Zum Beweis von Satz 1	35
2.2	Pseudo-Stabilitaet	41
2.3	Beweis von Satz 1	48
2.4	Der Ordnungstyp einer duennen Menge	53
3.	Duenne Σ_n Mengen	55
4.	Anwendungen	
4.0	Friedberg-Splitting	60
4.1	Nicht-Existenz maximaler Mengen	63
	Literaturverzeichnis	66

EINLEITUNG

Die klassische Rekursionstheorie auf natuerlichen Zahlen (KRT) wurde von Kreisel und Sacks auf ω_1^{CK} und spaeter von Kripke und Platek auf beliebige admissible Ordinalzahlen α verallgemeinert (Meta-RT und α -RT). Dabei heisst α admissible, falls L_α Modell von Σ_1 Ersetzung ist; d.h. L_α ist abgeschlossen gegen α -rekursive Funktionen. Viele Resultate aus der KRT uebertragen sich. Die wesentliche Schwierigkeit ist dabei, dass Konstruktionen aus der KRT haeufig staerkere Abschlusseigenschaften zu verlangen scheinen als Σ_1 Ersetzung. Es zeigt sich aber, dass viele der Argumente verfeinert werden koennen und dann fuer alle oder zumindest manche α gueltig sind. Methoden und Resultate aus der Feinstrukturtheorie von L nach Jensen sind hierbei oft hilfreich. Sacks und Simpson z.B. zeigten unter Verwendung von Skolem Huellen, dass Posts Problem fuer alle α eine Loesung besitzt.

Jensens Untersuchungen erstrecken sich auf beliebige Anfangsabschnitte der konstruktiblen Hierarchie. Sacks und Friedman unternahmen deshalb vor einigen Jahren den Versuch, Rekursionstheorie auf solchen Abschnitten L_β , β Limeszahl, zu treiben (β -RT). Die grundlegenden Definitionen werden direkt aus der α -RT uebernommen :

$X \subset L_\beta$ heisst β -rekursiv aufzaehlbar (β -ra), falls $X \cap \Sigma_1$ - L_β ist, β -rekursiv (β -rek), falls $X \cap \Delta_1$ - L_β ist und β -finit, falls $X \in L_\beta$. Eine Funktion heisst partiell β -rekursiv, falls ihr Graph β -ra ist.

Im Gegensatz zur α -RT kann jetzt fuer eine β -rekursive Funktion f und ein β -finites $a \in \text{dom } f$ $f[a]$ nicht β -finit sein (inadmissibility).

Sei κ die kleinste Ordinalzahl, fuer die dieser Effekt auftritt (d.h. $f[\kappa]$ nicht β -finit fuer ein β -rekursives f) und β^* die Σ_1 Projektion von β . Nach Maass heisst β weakly admissible (w.adm.), falls $\beta^* \leq \kappa$ und strongly inadmissible (s.inad.) sonst. Fuer w.adm. β bleiben viele Resultate aus der α -RT erhalten; so kann z.B. Posts Problem immer geloest werden (Friedman). Im s.inad. Fall dagegen geht diese Aehnlichkeit oft verloren, z.B. existieren nach Friedman s. inad. β mit genau drei β -ra Graden.

Wir beschaeftigen uns in dieser Arbeit ausschliesslich mit dem Verband $\mathcal{E}_\beta$ der β -ra Mengen unter mengentheoretischer Inklusion. Die algebraische Struktur dieses Verbandes in der KRT (d.h. von $\mathcal{E}_\omega$) ist recht kompliziert. Es existiert eine Vielzahl verschiedener Arten von rekursiv aufzaehlbaren Mengen wie simple Mengen, hyper-hyper-simple Mengen, maximale Mengen usw., die verschiedene 1-Typen in der Sprache der Verbandstheorie ueber $\mathcal{E}_\omega$ besitzen. Lerman hat deshalb vorgeschlagen, die Verbaende $\mathcal{E}_\alpha$ zu studieren in der Hoffnung, dass fuer manche α die Struktur von $\mathcal{E}_\alpha$ einfacher sein koennte als die von $\mathcal{E}_\omega$. Der erste Schritt in dieser Richtung ist es, eine Verallgemeinerung fuer den Begriff "endlich" im Sinne von $\mathcal{E}_\omega$ zu finden. Die endlichen Mengen bilden ein Ideal Fin von $\mathcal{E}_\omega$, das definierbar ist ueber $\mathcal{E}_\omega$. Sei dazu $\Phi(X) := \forall Y (Y \subset X \rightarrow \exists Z (Y \cap Z = \emptyset \ \& \ Y \cup Z = \Pi))$ in der Sprache der Verbandstheorie. Es ist fuer $X \in \mathcal{E}_\omega$: $X \in \text{Fin}$ gdw $\mathcal{E}_\omega \models \Phi(X)$. Maass nennt deshalb die $X \in \mathcal{E}_\beta$ mit $\mathcal{E}_\beta \models \Phi(X)$ 1-finit (1 fuer lattice). $1\text{-Fin} := \{X \in \mathcal{E}_\beta \mid X \text{ 1-fin.}\}$ ist wieder ein Ideal von $\mathcal{E}_\beta$ und es ist leicht zu sehen, dass es nach einem Satz von Lachlan und Lerman das einzige definierbare Ideal "endlicher" Mengen von $\mathcal{E}_\beta$ ist (siehe Kapitel 0.2). Man erhaelt so natuerliche Verallgemeinerungen der oben genannten Begriffe; $M \in \mathcal{E}_\beta$ z.B. heisst β -maximal, falls $L_\beta - M$ nicht 1-finit ist, aber durch keine β -ra Menge in zwei nicht 1-finite Teile gespalten werden kann.

Sei jetzt β w.adm.. Dann ist jede 1-finite Menge insbesondere β -finit. Die 1-finiten Mengen koennen durch ihre β -Kardinalitaet charakterisiert werden: $X \in L_\beta$ ist 1-finit gdw die β -Kardinalitaet von X ist kleiner als β^* . Die Situation ist also die gleiche wie in der α -RT (siehe L1, L2). Eine Methode, diese Aehnlichkeit systematisch auszunutzen liefert der Maass-Kollaps $\mathcal{O}_\beta$ von L_β . $\mathcal{O}_\beta = \langle L_\kappa, D \rangle$ ist eine admissible Struktur mit einem Zusatzpraedikat D , das die β -ra Mengen kodiert. Der Verband der $\mathcal{O}_\beta$ -ra Mengen ist isomorph zu $\mathcal{E}_\beta$. Viele Beweise aus der α -RT uebertragen sich ohne weiteres auf $\mathcal{O}_\beta$, man kann deshalb den Maass-Kollaps dazu verwenden, Saetze ueber $\mathcal{E}_\alpha$ auf $\mathcal{E}_\beta$ zu transferieren (siehe M1 fuer die Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit β -ra Graden auftreten; diese Probleme entfallen hier).

Betrachte jetzt ein s.inad. β . Dann existieren stets 1-finite Mengen, die nicht β -finit sind. Die β -Kardinalitaet reicht also zur Beschreibung von 1-Fin nicht aus. Wir betrachten deshalb die Σ_1^β Kardinalitaet von β -ra Mengen. Die Σ_1^β Kardinalitaet $|X|^{\beta,1}$ misst die kuerzest-moegliche Aufzaehlung einer β -ra Menge X :

$$|X|^{\beta,1} := \min(\delta \mid \text{ex. } f \text{ } \beta\text{-rekursiv mit } f \text{ bijektiv, dom } f = \delta \text{ und } \text{rg } f = X).$$

X heisst duenn, falls $|X|^{\beta,1} < \beta^*$.

Die duennen Mengen sind gerade die β -ra Mengen, deren Ordnungstyp kleiner ist als β^* . Es ist leicht zu sehen, dass die 1-finiten Mengen duenn sind. Umgekehrt ist jede duenne β -rekursive Menge auch 1-finit. Wir beweisen deshalb den

Satz :

Sei $X \subset \beta^*$ β -ra und duenn. Dann ist X β -rekursiv.

Es folgt, dass die 1-finiten Mengen genau die duennen Mengen sind. Dieses Resultat unterstuetzt die Vermutung von Maass, dass β^* und κ die Schluesselparameter von β sind (siehe M2).

In Kapitel 0 geben wir die grundlegenden Definitionen und rekapitulieren einige wohlbekannte Fakten aus Jensens Feinstrukturtheorie. Ein Reflexions-Prinzip fuer L_β wird bewiesen um zu zeigen, dass die β -Kardinalitaet fuer alle β wohldefiniert ist.

In Kapitel 1 betrachten wir 1-finite Mengen im w.adm. Fall und charakterisieren sie durch ihre β -Kardinalitaet. Der Maass-Kollaps wird dazu verwendet, Lermans Satz ueber maximale Mengen auf diesen Fall zu uebertragen. Mit einem Resultat von Owings erhalten wir ein Beispiel fuer ein w.adm. β mit $\mathcal{E}_\beta(\kappa) \neq \mathcal{E}_\beta(\beta^*)$.

In Kapitel 2 untersuchen wir 1-finite Mengen fuer s.inad. β . Die β -Version von stabilen Ordinalzahlen wird benutzt, um zu zeigen, dass die 1-finiten Mengen auch in diesem Fall gerade die duennen Mengen sind. Duenne Mengen werden ferner durch ihren Ordnungstyp beschrieben.

In Kapitel 3 wird beschrieben, wie sich die Argumente aus Kapitel 1 und Kapitel 2 auf $\sum_n L_\beta$ Mengen, $n \geq 1$, verallgemeinern lassen. Wir verwenden dazu Jensens $\sum_n$ Master Codes und das Extension Lemma.

Kapitel 4 schliesslich enthaelt Anwendungen der Resultate aus Kapitel 2. Wir zeigen, dass Friedberg Splitting fuer alle β gilt. Zwei Nicht-Existenz Resultate fuer maximale Mengen im s.inad. Fall werden bewiesen (die Frage, ob maximale Mengen in diesem Fall existieren, bleibt offen).

KAPITEL 0

GRUNDLAGEN UND EINIGE FAKTEN

(0.0) DEFINITIONEN UND EINIGE TATSACHEN AUS DER FEINSTRUKTURTHEORIE

In Kapitel (0.0) geben wir die grundlegenden Definitionen und erwaehnen eine Reihe von Fakten ohne auf Beweise und Einzelheiten einzugehen. Beweise finden sich z.B. in D1 und F1. D1 und D2 enthaelt auch die notwendige Hintergrundinformation ueber die konstruktible Hierarchie (i.e. Feinstrukturtheorie), deren Definition auf Goedel zurueckgeht. Wir verwenden Goedels urspruengliche Definition, d.h. die L-Hierarchie, anstelle der J-Hierarchie, die von Jensen eingefuehrt wurde, um das Studium von L zu erleichtern. Siehe F1 oder M1 fuer die Verwendung der J-Hierarchie im Kontext von β -Rekursionstheorie. Mit Ausnahme von Kapitel (0.1) kann man die Resultate problemlos in die J-Hierarchie uebersetzen. Unsere Notation ist weitgehend standard und mit den zitierten Arbeiten vertraeglich.

Wir verwenden zur Darstellung unserer Ergebnisse die Sprache der Mengenlehre in informeller Weise. Kleine griechische Buchstaben bezeichnen stets Ordinalzahlen (OrdZ) im Sinne von von Neumann, d.h. eine OrdZ ist die Menge ihrer Vorgaenger. α, β, λ sind immer Limeszahlen, κ ist admissible.

Levy-Hierarchie

Als Objektsprache dient wieder die Sprache der Mengenlehre; die Praedikatzeichen sind also $\in, =$ und bisweilen ein einstelliges, zusaetzliches Praedikatzeichen $\underline{B}$.

Eine Formel heisst Σ_0 (oder auch Π_0, Δ_0) falls nur beschraenkte Quantoren in ihr auftreten.

Eine Formel heisst Σ_{n+1} (Π_{n+1}) falls sie aus einem Existenzquantor (Allquantor) gefolgt von einer Π_n (Σ_n) Formel besteht.

Strukturen sind stets vom Typ $\mathcal{L} = \langle L_\beta, \epsilon, B \rangle$, kurz $\langle L_\beta, B \rangle$. $B \subseteq L_\beta$ ist hierbei immer regulär, d.h. $\forall y < \beta (L_y \cap B \in L_\beta)$. Wir betrachten auch extensionale Substrukturen $\langle X, X \cap B \rangle$ von $\mathcal{L}$. Das Praedikatzeichen $\underline{B}$ wird als B interpretiert.

Eine Relation $R \subseteq L_\beta^k$ heisst Σ_n - $\mathcal{L}$ falls R eine Σ_n Def. ueber $\mathcal{L}$ besitzt, d.h. es gibt eine Σ_n Formel $\Phi(\vec{x}, \vec{y})$ und Parameter $\vec{a}$ aus L_β derart, dass fuer alle $\vec{b} \in L_\beta^k$ gilt: $R(\vec{b})$ gdw $\mathcal{L} \models \Phi(\vec{b}, \vec{a})$. Analog fuer Π_n - $\mathcal{L}$.

R heisst Δ_n - $\mathcal{L}$ falls R sowohl Σ_n - $\mathcal{L}$ als auch Π_n - $\mathcal{L}$ ist.

Eine Funktion f heisst Σ_n - $\mathcal{L}$ falls $\text{dom } f \subseteq L_\beta^k$, $\text{rg } f \subseteq L_\beta$ und $\text{Graph}(f)$ ist Σ_n - $\mathcal{L}$.

Fuer eine Parametermenge $A \subseteq L_\beta$ schreiben wir $\Sigma_n^{\mathcal{L}}\text{-}A$ falls die Parameter $\vec{a}$ in A sind und $\Sigma_n^{\mathcal{L}}$ statt $\Sigma_n^{\mathcal{L}}\text{-}\emptyset$.

Konvention :

Im Spezialfall $\mathcal{L} = \langle L_\beta, \emptyset \rangle$ schreiben wir in Zusammensetzungen wie Σ_n - $\mathcal{L}$ meist L_β oder auch nur β statt $\mathcal{L}$. Manchmal lassen wir auch β weg, falls es aus dem Kontext ersichtlich ist. Wir schreiben also $\Sigma_n^{L_\beta}$, Σ_n^β , Σ_n .

$\alpha \prec_n \mathcal{L}$ heisst α ist Σ_n elementare Substruktur von $\mathcal{L}$. Also ist z.B. fuer $\gamma \leq \beta$ $L_\gamma \prec_0 L_\beta$. $\lambda \in \beta$ heisst β -stabil falls $L_\lambda \prec_1 L_\beta$.

Bemerkung :

Wir verzichten darauf, eine ausfuehrliche Definition oder gar Arithmetisierung der Sprache $\mathcal{L}(\mathcal{L})$ anzugeben und verwenden Formeln und Erfuellungsrelation $\models$ in informeller Weise. Wir schreiben also z.B. $L_\beta \models (\rho \text{ ist KardinalZ})$. Bisweilen missbrauchen wir diese Notation und unterscheiden nicht zwischen verschiedenen Sprachebenen. Sei etwa $X \prec_1 L_\beta$, $y \in X \cap \beta$, $a \in L_\gamma \cap X = (L_\gamma)^X$, $\varphi(u, v) \Delta_0$ Formel.

Um auszudruecken, dass X glaubt, dass L_Y Modell der Formel $\exists x \varphi(x, a)$ ist schreiben wir

$$X \models (L_Y \models \exists x \varphi(x, a)) . \quad (*)$$

X ist extensional, der Mostowski-Kollaps $\pi : X \longleftrightarrow L_\delta$ ist also ein ϵ -Isomorphismus (siehe Kap.0.1); sei $\bar{y} := \pi(y)$ und $\bar{a} := \pi(a)$. Aus (*) folgt dann

$$L_\delta \models (L_{\bar{y}} \models \exists x \varphi(x, \bar{a})) . \quad (**)$$

Denn $\models$ ist primitiv-rekursiv nach D1, Lemma 2.12 und nach D1, Lemma 2.10 ist π vertraeglich mit $\models$: wegen $X <_1 L_\beta$ ist X abgeschlossen gegen die entsprechende primitiv-rekursive Definition von $\models$. Aus (**) folgt dann $\varphi(x_0, \bar{a})$ fuer ein $x_0 \in L_{\bar{y}}$, denn als transitive Substruktur von L_β ist $L_{\bar{y}}$ absolut fuer Δ_0 Formeln.

Argumente dieser Art werden wir im Folgenden ohne besondere Hinweise verwenden, fuer Details siehe die ersten beiden Kapitel in D1.

L-Hierarchie

Definiere durch Induktion ueber die OrdZen

$$L_0 := \emptyset$$

$$L_{\nu+1} := \{ x \in L_\nu \mid x \text{ ist } \Sigma_n\text{-}L_\nu \text{ fuer ein } n < \omega \}$$

$$L_\lambda := \bigcup \{ L_\nu \mid \nu < \lambda \}$$

$$L := \bigcup \{ L_\nu \mid \nu \in \text{OrdZ} \} .$$

Vereinbarung :

Um die Notation uebersichtlich zu halten sei $V=L$!

(x, y) sei das mengentheoretische Paar, wir schreiben manchmal zur Hervorhebung $(x, y)_S$; analog fuer n -Tupel. Nur Limesstufen L_λ sind abgeschlossen gegen Paarbildung, fuer die Probleme, die daraus entstehen siehe Kap.0.1 . $\text{Pa}(X)$ sei der Abschluss von X gegen Paare.

Fuer eine Funktion f bedeute $f : X \longleftrightarrow Y$ dass f Bijektion mit $\text{dom } f = X$ und $\text{rg } f = Y$ ist.

$X \Delta Y$ sei die symmetrische Differenz $(X - Y) \cup (Y - X)$.

Projektionen, Kofinalitaeten, β -Kardinalitaet

Sei $\gamma \leq \beta$, $0 < n < \omega$. Die Σ_n - $\mathcal{L}$ Projektion bzw. Σ_n - $\mathcal{L}$ Kofinalitaet von γ sind wie folgt definiert :

$$\sigma n^{\mathcal{L}}(\gamma) := \min(\delta \mid \text{ex. f. } \Sigma_n\text{-}\mathcal{L} \text{ f. } \gamma \longrightarrow \delta \text{ injektiv})$$

$$\sigma n^{\mathcal{L}}(\gamma) := \min(\delta \mid \text{ex. f. } \Sigma_n\text{-}\mathcal{L} \text{ f. } \delta \longrightarrow \gamma \text{ kofinal}).$$

Wir schreiben $\mathcal{L}^*$ statt $\sigma 1^{\mathcal{L}}(\beta)$, κ statt $\sigma 1^{\mathcal{L}}(\beta)$ und β^* statt $\sigma 1^{\mathcal{L}}(\beta)$. Sei weiter $\hat{\beta} := \max(\beta^*, \kappa)$.

β heisst admissible falls $\kappa = \beta$, weakly admissible (w.adm.) falls $\beta^* \leq \kappa$ und strongly inadmissible (s.inad.) sonst.

Sei noch $\sigma 0^{\mathcal{L}}(\gamma) := \text{cof}^{\beta}(\gamma) := \min(\delta \mid \text{ex. f. } \in L_{\beta} \text{ f. } \delta \longrightarrow \gamma \text{ kofinal})$. γ heisst $\Sigma_n^{\mathcal{L}}$ regulaer falls $\sigma n^{\mathcal{L}}(\gamma) = \gamma$.

Fuer $X \subset L_{\beta}$ sei die Σ_n - $\mathcal{L}$ Kardinalitaet von X definiert wie folgt

$$|X|^{\mathcal{L}, n} := \begin{cases} \min(\delta \mid \text{ex. f. } \Sigma_n\text{-}\mathcal{L} \text{ f. } \delta \longleftrightarrow X) & \text{falls ex.} \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir interessieren uns insbesondere fuer den Fall $n = 0, 1$ falls $X \in L_{\beta}$ oder $X \in \Sigma_1\text{-}\mathcal{L}$. Wir zeigen in Kap.0.1, dass $|X|^{\beta} := |X|^{\mathcal{L}, 0}$ fuer alle $X \in L_{\beta}$ definiert ist. Beachte, dass fuer $X \in L_{\beta}$ $|X|^{\beta} < \beta$ und damit $|X|^{\beta} = \min(\delta \mid \text{ex. f. } \in L_{\beta} \text{ f. } \delta \longleftrightarrow X)$.

$\rho < \beta$ heisst β -Kardinalzahl (β -KardZ) falls $| \rho |^{\beta} = \rho$. gc β sei die groesste β -KardZ falls eine solche existiert und β sonst. Eine β -KardZ ρ heisst Limes- β -KardZ falls ρ das Supremum kleinerer β -KardZ ist und Nachfolger- β -KardZ sonst (N- β -KardZ, L- β -KardZ). ρ heisst regulaer falls $\rho \in \Sigma_0$ regulaer ist.

Fuer jedes n , $0 < n < \omega$, und $\gamma \leq \beta$ gilt : $\sigma n^{\mathcal{L}}(\gamma)$ ist β -KardZ und $\sigma n^{\mathcal{L}}(\gamma)$ ist regulaere (sogar $\Sigma_n^{\mathcal{L}}$ regulaere) β -KardZ.

Fuer eine β -KardZ ρ heisst $X \subset L_{\beta}$ ρ -finit falls $X \in L_{\beta}$ und $|X|^{\beta} < \rho$.

Fuer β -KardZ ρ kann man leicht ein Kodierungsschema $\langle \dots \rangle$ definieren, das Σ_1 - L_β ist, $\langle \dots \rangle : \bigcup_{n < \omega} \rho^n \longleftrightarrow \rho$. $\langle \dots \rangle$ ist also Element von L_β .

β -Rekursionstheorie

Die folgende Definiton geht zurueck auf Friedman und Sacks und ist unmittelbar aus der α -Rekursionstheorie uebernommen. Sei $X \subset L_\beta$.

X heisst β -rekursiv aufzaehlbar (β -ra) falls X ist Σ_1 - L_β

X heisst β -rekursiv (β -rek) falls X ist Δ_1 - L_β

X heisst β -finit falls $X \in L_\beta$.

Eine Funktion f mit $\text{dom } f, \text{rg } f \subset L_\beta$ heisst partiell β -rekursiv (p - β -rek) falls der Graph von f β -ra ist und β -rekursiv (β -rek) falls zusaetzlich $\text{dom } f$ β -rek ist.

Analog fuer Strukturen $\mathcal{B} = \langle L_\beta, B \rangle$.

Wir verwenden die Bezeichnungen fuer β -ra Mengen X und p - β -rek Funktionen f auch als Bezeichnung fuer eine entsprechende Σ_1 Formel. Wir schreiben also z.B.

$L_\beta \models f(x) \approx y$ oder $L_\beta \models x \in X$.

Fakten

Wir listen im Folgenden eine Reihe von Fakten, die dann in Zukunft meist stillschweigend verwendet werden.

(1) Aufzaehlungen

Sei $X \subset L_\beta$. X ist β -ra gdw es existiert ein $\delta \leq \beta$ und eine β -rek Funktion $f : \delta \longleftrightarrow X$.

Fuer einen Beweis siehe M2. Es folgt, dass fuer X β -ra $|X|^{\beta,1}$ stets definiert ist; in der Tat ist $|X|^{\beta,1} \leq \hat{\beta}$.

Es ist praktisch, den Begriff Aufzaehlung einer β -ra Menge auch in einem anderen Zusammenhang zu verwenden. Sei dazu

$\Phi(v)$ eine Σ_1 Formel mit Parametern aus L_β , die X definiert, d.h. fuer alle $x \in L_\beta$ gilt $x \in X$ gdw $L_\beta \models \Phi(x)$. Sei $q : \kappa \rightarrow \beta$ die Kofinalitaetsfunktion aus Fakt (4). $X^\sigma := \{x \in L_\beta \mid L_{q(\sigma)} \models \Phi(x)\}$, $\sigma < \kappa$. X^σ ist β -finit und die Funktion $\sigma \mapsto X^\sigma$ ist β -rek. Wir nennen $\langle X^\sigma \mid \sigma < \kappa \rangle$ dann ebenfalls Aufzaehlung von X . Es ist jeweils aus dem Kontext ersichtlich, von welcher Art von Aufzaehlung die Rede ist.

(2) Δ_1 Separation

$$\hat{\beta} = \min(\delta \mid \text{ex. } A \subset \delta \text{ } \beta\text{-rek} : A \text{ nicht } \beta\text{-finit}) \\ = |L_\beta|^{\beta,1}.$$

β ist also admissible gdw $\beta = \kappa$ gdw $\hat{\beta} = \beta$.

Unterhalb von $\hat{\beta}$ gilt also Δ_1 Separation.

Siehe Kap.3 fuer $|L_\beta|^{\beta,n}$.

(3) Σ_n Separation

Nach Jensen koennen Σ_n Projektionen alternativ in der folgenden Weise charakterisiert werden :

$$\sigma_{np}^\beta(\beta) = \min(\delta \mid \text{ex. } f : \Sigma_n - L_\beta : \text{dom } f \subset \delta \text{ und } \text{rg } f = L_\beta) \\ = \min(\delta \mid \text{ex. } A : \Sigma_n - L_\beta : A \subset \delta \text{ und } A \text{ nicht } \beta\text{-finit}).$$

Unterhalb von β^* gilt also Σ_1 Separation.

(4) Σ Rekursion

Rekursion ueber β -rek Funktionen bis κ liefert wieder β -rek Funktionen : Sei $G : \kappa \times L_\beta \rightarrow L_\beta$ β -rek, definiere $f : \kappa \rightarrow L_\beta$ per $f(\sigma) := G(\sigma, f \upharpoonright \sigma)$. Dann ist f β -rek und $\text{dom } f = \kappa$.

Anwendung:

Es existiert eine streng monotone, stetige, β -rek Funktion $q : \kappa \rightarrow \beta$ mit $\text{rg } q \subset \beta$ ist kofinal.

Sei naemlich $\bar{q} : \kappa \rightarrow \beta$ β -rek mit $\text{rg } \bar{q}$ kofinal nach Def. von $\kappa = \sigma \text{ lcf } \beta$. Definiere $q(0) := 0$,

$q(v+1) := \max(\bar{q}(v), q(v)+1)$, $q(\lambda) := \sup\{q(v) \mid v < \lambda\}$.

Wir reservieren q als Bezeichnung fuer eine solche Funktion.

(5) Universelle Praedikate

Es existiert ein universelles Σ_n Praedikat $U_n^{\mathcal{L}}(u,v)$ uniform fuer alle $\mathcal{L} = \langle L_{\beta}, B \rangle$ mit $B \subset L_{\beta}$ regulaer.

Fuer $n=1$ erhaelt man eine simultane Aufzaehlung aller β -ra Mengen mit Indices in L_{β} . Wir verwenden in Kap.4 eine kuerzere Indizierung. Sei dazu $P : L_{\beta} \rightarrow \beta^*$ eine Σ_1 Proj.

$$W_e := \{ x \in L_{\beta} \mid \exists \bar{e} \in L_{\beta} (P(\bar{e}) \approx e \ \& \ U_1^{\beta}(\bar{e}, x)) \} \ , \ e < \beta^* .$$

(6) Σ_n Uniformisierung

Das ist eines der zentralen Resultate der Feinstrukturtheorie nach Jensen. Sei $R \subset L_{\beta} \times L_{\beta}$ Σ_n - L_{β} . Dann existiert eine Σ_n - L_{β} Funktion r mit $\text{dom } R = \text{dom } r$ und $\exists y R(x,y) \rightarrow R(x,r(x))$.

Im Spezialfall $n=1$ ist die Klasse unserer $\mathcal{L}$ sogar uniform Σ_1 uniformisierbar.

(7) Σ_n Definitionen

Sei $a \in L_{\beta}$, $X \subset L_{\beta}$, $n \geq 1$. a heisst Σ_n definierbar ueber $\mathcal{L}$ mit Parametern aus X falls fuer eine parameterfreie Σ_n Formel $\Phi(u, v_1, \dots, v_N)$ und $x_1, \dots, x_N$ aus X gilt :

$$\mathcal{L} \models \exists! u \Phi(u, x_1, \dots, x_N) \ \& \ \Phi(a, x_1, \dots, x_N) \ .$$

Nach (3) ist fuer ein $p \in L_{\beta}$ jedes $x \in L_{\beta}$ Σ_1 definierbar ueber $\mathcal{L}$ mit Parametern aus $\mathcal{L}^* \cup \{p\}$. Sei deshalb

$$p(\mathcal{L}) := \min(p \in L_{\beta} \mid \text{jedes } x \in L_{\beta} \text{ ist } \Sigma_1 \text{ defb. ueber } \mathcal{L} \text{ mit Parametern aus } \mathcal{L}^* \cup \{p\}) .$$

$\min$ versteht sich hier bzgl. der kanonischen Wohlordnung

$<_L$ von L . Wir schreiben $<_{\beta}$ fuer $<_L \upharpoonright L_{\beta} \times L_{\beta}$.

$<_{\beta}$ ist β -rek.

(8) $|a|^{\beta,1}$ fuer a β -finit

Sei $a \in L_{\beta}$ und $\rho := |a|^{\beta}$, $\bar{\rho} := |a|^{\beta,1}$.

$\rho \leq \hat{\rho}$ oder $\bar{\rho} < \hat{\rho}$ impliziert $\rho = \bar{\rho}$.

Beweis:

Trivialerweise ist $\bar{\rho} \leq \rho$.

Annahme: $\bar{\rho} < \rho$.

Dann muss $\rho > \bar{\rho} \geq \kappa$ sein, da sonst jede Aufzählung $f: \rho \longleftrightarrow \alpha$ schon β -finit wäre wegen Σ_1 Kollektion.

Also ist $\bar{\rho} \geq \rho > \kappa$, d.h. $\bar{\rho} = \beta^*$. Aber es existiert eine β -rek Funktion $g: \bar{\rho} \longleftrightarrow \rho$ weil $\bar{\rho} = |\alpha|^{\beta,1} = |\rho|^{\beta,1}$.

$g \in \bar{\rho} \times \rho \subset L_{\beta^*}$ muss unbeschränkt sein in L_{β^*} da sonst g β -finit wäre wegen Σ_1 Separation im Widerspruch zu $\bar{\rho} < \rho$, beides β -KardZ.

Also ist $\rho = \beta^*$. Aber dann liefert g^{-1} einen Widerspruch zur Definition von β^* . □

Für eine β -KardZ ρ mit $\bar{\rho} < \rho < \beta$ ist natürlich $|\rho|^{\beta,1} < |\rho|^{\beta}$.

(0.1) SKOLEM FUNKTIONEN, REFLEXION FUER L_β

Die konstruktible Hierarchie wurde von Goedel urspruenglich eingefuehrt, um die Konsistenz von Kontinuumshypothese und ZF-Mengenlehre zu beweisen. Die verallgemeinerte KH folgt sofort aus dem folgendem Reflexionsprinzip (RP_β) fuer L_β . Wir verwenden (RP_β) unter anderem um zu zeigen, dass die β -Kardinalitaet $|a|^\beta$ fuer jedes a aus L_β definiert ist.

(RP_β) Sei $\rho < \beta$ eine β -Kardinalzahl, ρ β -finit und $\rho < \delta < \rho$. Dann ist ρ schon ρ -finit.

Zum Beweis benoetigen wir noch mehr Information ueber die Feinstruktur von L , sie ist in den folgenden Lemmata zusammengefasst. Beweise finden sich z.B. in D2.

Definition :

Sei wie stets $\mathcal{L} = \langle L_\beta, B \rangle$, $B \subset L_\beta$ regulaer, $n \geq 1$.

Sei f eine partielle Σ_n - $\mathcal{L}$ Funktion mit dom $f \subset \omega \times L_\beta$ und $rg f \subset L_\beta$. f heisst Σ_n Skolem Funktion fuer $\mathcal{L}$ falls fuer jedes $a \in L_\beta$ und jede Σ_n - $\{a\}$ Relation R gilt :

$R \neq \emptyset \rightarrow \exists i < \omega \ R(f(i, a))$.

Die Existenz von Σ_n Skolem Funktionen folgt aus dem Σ_n Uniformisierungssatz von Jensen, im Fall $n=1$ ist der Beweis elementar.

Lemma 1 : Existenz von Skolem Funktionen

L_β hat eine Σ_n Skolem Funktion fuer alle $n \geq 1$.

Insbesondere existiert eine Σ_1 Skolem Funktion $h^{\mathcal{L}}$ fuer $\mathcal{L}$ die uniform Σ_1 - $\emptyset$ definierbar ist fuer alle $\beta > \omega$.

Wir nennen $h^{\mathcal{L}}$ die Standard Skolem Funktion (SSF) fuer $\mathcal{L}$ und schreiben oft h statt $h^{\mathcal{L}}$. Fuer $a \in L_\beta$ sei

$h_a(i, x) := h(i, (a, x)_s)$. Wir verwenden h_a zur Bildung von Σ_1 Skolem Huellen :

$SH_1(X, a; \mathcal{L}) := h_a^{\mathcal{L}}[\omega \cup Pa(X)]$ fuer $X \subset L_\beta, a \in L_\beta$.

Lemma 2 :

Sei $X \in L_\beta$ abgeschlossen gegen Paare, $a \in L_\beta$.

Dann ist $h_a^B[\omega \times X]$ eine Σ_1 Substruktur von $\mathcal{L}$.

Insbesondere ist also $SH_1(X, a; \mathcal{L}) \leq_1 \mathcal{L}$.

Die wichtigste Eigenschaft von Σ_1 Substrukturen ist im folgenden Lemma formuliert.

Lemma 3 : Kondensationslemma

Sei $X \leq_1 L_\beta$, $\pi: X \rightarrow Y$ der Mostowski-Kollaps.

Dann existiert ein $\gamma \in \beta$ mit $Y = L_\gamma$.

Die Anwendung des Mostowski-Kollaps ist gerechtfertigt, da X wegen $X \leq_1 L_\beta$ extensional ist. Für $X_0 \subset X$ transitiv ist $\pi \upharpoonright X_0 = \text{id}$.

Eine typische Anwendung von Skolem Hüllen zusammen mit dem Kondensationslemma ist das folgende

Beispiel :

Es existiert ein β mit $\beta^* < \kappa < \beta$.

Sei dazu $X := SH_1(L_\omega, \mathcal{X}_1; L_{\mathcal{X}_2})$. Nach Lemma 2&3 existiert ein β mit $\pi: X \rightarrow L_\beta$. Dieses β tut's.

Offenbar existieren genau zwei β -KardZ : $\omega = \pi(\omega)$ und

$\rho := \pi(\mathcal{X}_1)$.

Behauptung : $\omega = \beta^*$.

Sei naemlich $f := h_{\mathcal{X}_1}^{L_{\mathcal{X}_2}} \upharpoonright \omega \times L_\omega$ und $\bar{f} := \pi[f]$. Wegen $X \leq_1 L_{\mathcal{X}_2}$ ist $f \Sigma_1$ -X, also $\bar{f} \Sigma_1$ - L_β . Aber $\text{dom } \bar{f} \subset \omega \times L_\omega$, $\text{rg } \bar{f} = L_\beta$, mit Fakt 3 folgt $\beta^* = \omega$.

Damit ist $\text{gc } \beta > \beta^*$, also insbesondere β inadmissible und es genuegt zu zeigen, dass $\kappa = \rho$.

Annahme : $\kappa = \omega$. Sei $\bar{q}: \omega \rightarrow \beta$ die entsprechende Σ_1 Kofinalitaetsfunktion, $q := \pi^{-1}[\bar{q}]$, $q: \omega \rightarrow X \cap \mathcal{X}_2$.

$\mathcal{X}_2$ ist regulaer, also gilt

$L_{\mathcal{X}_2} \models \exists \lambda (L_\lambda \models \forall x < \omega \exists y (q(x) \approx y))$

$q(x) \approx y$ ist hier als entsprechende Σ_1 Formel aufzufassen.

Wegen $X <_1 L_{X_2}$ gilt fuer ein $\lambda \in X \cap X_2$

$X \models (L_\lambda \models \forall x < \omega \exists y q(x) = y)$.

$\models$ ist primitiv-rekursiv, also vertraeglich mit π und mit $\bar{\lambda} := \pi(\lambda)$ gilt:

$L_\beta \models (L_{\bar{\lambda}} \models \forall x < \omega \exists y \bar{q}(x) = y)$.

Aber dann ist $\text{rg } \bar{q} < \bar{\lambda} < \beta$, Widerspruch.

Zurueck zum Beweis von (RP_κ).

ρ ist eine β -KardZ, sei deshalb oBdA δ Limeszahl.

Fall 1: β Limes von Limeszahlen.

Dann existiert eine Limeszahl λ mit $p \in L_\lambda$. Sei

$X := SH_1(L_\delta, p; L_\lambda)$, $\pi: X \longleftrightarrow L_\gamma$ der Kollaps, $\gamma \notin \lambda$.

Es ist $L_\delta \subset X$ transitiv, also $p = \pi(p) \in L_\gamma$. Wie im Beispiel folgt $\text{clp}^\gamma(\gamma) \leq \delta$. Aber $\gamma \notin \lambda < \beta$, also ist $|\gamma|^\beta \leq \delta < \rho$ und damit $p \in L_\gamma \subset L_\rho$.

Fall 2: $\beta = \lambda + \omega$.

Man kann oBdA annehmen, dass $p \notin L_\lambda$ wobei λ die groesste Limeszahl kleiner als β ist. Um den Beweis von Fall 1 zu uebertragen benoetigt man eine Art von Skolem Funktionen fuer Nachfolgerstufen $L_{\lambda+n}$, $0 < n < \omega$. Betrachte dazu eine Arithmetisierung der Sprache der Mengenlehre wie in D2. Wesentlich ist die Verwendung einer flachen Kodierung fuer endliche Sequenzen. Sei

$[a_0, \dots, a_N] := \{(0, a_0)_S, \dots, (N, a_N)_S\}$ $0 \leq N < \omega$

$\text{Seq}(a) := \{[a_0, \dots, a_N] \mid a_i \in a, N < \omega\}$

$[b]_i := \begin{cases} b_i & \text{falls } b = [b_0, \dots, b_N] \text{ und } i \leq N \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$

Fuer ein Tupel $\vec{k}$ von natuerlichen Zahlen schreiben wir

$[b]_{\vec{k}}$ statt $[b]_{k_1}, \dots, [b]_{k_m}$.

$\langle \varphi_i \mid i < \omega \rangle$ sei eine rek Aufzählung der Δ_0 ZF Formeln.

$\langle \dots \rangle$ sei ein rek Kodierungsschema auf ω .

Wir modifizieren die Definition der Standard Skolem Funktionen um Nachfolgerstufen zu handhaben. Sei dazu λ Limeszahl, $0 \leq n$.

$H^{\lambda+n}$ ist eine partielle Funktion von $\omega \times L_{\lambda+n}$ nach $L_{\lambda+n}$.

$H^{\lambda+n}(i, x) = y \iff$

es existiert y^1, y^2 aus $\text{Seq}(L_{\lambda+n})$ und $i = \langle j, \bar{k}, \bar{l}, m \rangle$ derart, dass

(1) $(y^1, y^2)_s$ ist $<_L$ -minimal mit $L_{\lambda+n} \models \varphi_j([y^1]_{\bar{k}}, x, [y^2]_{\bar{l}})$

(2) $y = [y^2]_m$.

Wir nennen (y^1, y^2) Zeuge fuer y . Fuer die Funktion mit Zusatzparameter $a \in L_{\lambda+n}$ schreiben wir $H_a^{\lambda+n}$.

Bemerkung:

Die obige Definition von $H^{\lambda+n}$ kann offenbar als parameterfreie Σ_1 Formel $\phi(i, x, y)$ geschrieben werden. Die Relationen $<_L$ und $\models$, die in ϕ auftreten, sind absolut fuer Anfangsab-schnitte der konstruktiblen Hierarchie, ϕ ist deshalb persistent und es gilt: $L_{\lambda+m} \models \phi(i, x, y)$ impliziert $L_{\lambda+m'} \models \phi(i, x, y)$ fuer alle $m' \geq m$.

Im Fall $n=0$ liefert ϕ eine Σ_1 Definition von H^λ ueber L_λ , es existiert eine rekursive Funktion r derart, dass $H^\lambda(i, x) = H^\lambda(r(i), x)$.

Dagegen ist im Fall $n > 0$ $H^{\lambda+n}$ nicht first order definierbar ueber $L_{\lambda+n}$! Der Grund hierfuer ist, dass nur Limesstufen abgeschlossen sind gegen die Bildung von Seq , $<_L$ -Vorgaenger-mengen und des Erfuellungspraedikats $\models$. Beachte aber, dass diese Objekte nach endlich vielen Schritten in der konstruk-tiblen Hierarchie auftreten. Also existiert ein $n' > n$ so, dass ϕ $H^{\lambda+n'}$ ueber $L_{\lambda+n'}$ definiert.

Wir haben folgende Verallgemeinerung von Lemma 2 :

Lemma 2[#]:

Sei $X \subseteq L_\lambda$ abgeschlossen gegen Paare, $a \in L_{\lambda+n}$, $0 \leq n < \omega$.

$Y := H_a^{\lambda+n}[\omega \times X]$, $Y_0 := Y \cap L_\lambda$.

Dann ist $Y_0 <_1 L_\lambda$.

Beweis:

Nach dem Tarski-Kriterium genuegt es, das folgende zu zeigen:

sei b_ν aus Y_0 , $\nu \in N$, $\varphi \Delta_0$ - $\emptyset$ mit $L_\lambda \models \exists z \varphi(\bar{b}, z)$;

dann existiert ein z' in Y_0 mit $L_\lambda \models \varphi(\bar{b}, z')$.

Wir koennen oBdA annehmen, dass $N=1$. X ist abgeschlossen gegen Paare, sei deshalb fuer $\nu=0,1$ $b_\nu = H_a^{\lambda+n}(i_\nu, x)$ fuer ein x aus X . Seien (b_ν^1, b_ν^2) die entsprechenden Zeugen.

Betrachte die folgende Δ_0 - $\emptyset$ Formel :

$$\Psi(u, x, v) := \varphi_{j_0}([u]_{k_0}^1, x, [v]_{l_0}^1) \ \& \ \varphi_{j_1}([u]_{k_1}^1, x, [v]_{l_1}^1) \ \& \\ \varphi([v]_{m_0}, [v]_{m_1}, [v]_m).$$

Dabei sei $k'_{1,s} := k_{1,s} + \lg b_0^1$, $m := \lg b_0^2 + \lg b_1^2 + 1$ usw.

Setze $B^1 := b_0^1 * b_1^1$ and

$$B^2 := b_0^2 * b_1^2 * z'.$$

* bedeutet hier Konkatenation von endlichen Sequenzen, also ist B^1, B^2 aus $\text{Seq}(L_{\lambda+n})$. z' sei $\prec_L$ -minimal mit $L_\beta \models \varphi(\bar{b}, z')$.

Es ist leicht zu sehen, dass $(B^1, B^2)_s$ Zeuge fuer z' ist.

Also ist $z' \in Y_0$. □

Korollar:

(RP_β) gilt fuer beliebige Limeszahlen β .

Beweis:

Wir koennen oBdA annehmen, dass $\beta = \lambda + \omega$, $p \in L_{\lambda+n}$, $0 < n < \omega$.

ϕ_p sei die definierende Σ_1 Formel fuer $H_p^{\lambda+n}$ ueber $L_{\lambda+n}$, $n < n' < \omega$. Betrachte die folgende partielle Funktion f

von $\omega \times L_\beta$ nach $L_{\lambda+n}$.

$$f(i, x) \cong y : \Longleftrightarrow L_{\lambda+n'} \models \phi_p(i, x, y), \quad i < \omega, x \in L_\beta, y \in L_{\lambda+n}.$$

f ist Σ_1 definierbar ueber $L_{\lambda+n'}$ mit Parametern p und δ .

Ausserdem $f = H_p^{\lambda+n} \upharpoonright \omega \times L_\beta$ nach Wahl von n' .

Sei jetzt $Y := \text{rg } f$, $Y_0 := Y \cap L_\lambda$.

Y ist extensional, sei deshalb $\pi : Y \leftrightarrow Z$ der Mostowski-Kollaps, Z transitiv. Nach Lemma 2[#] und Lemma 3 gilt $\pi[Y_0] = L_Y$ fuer ein $\gamma \leq \lambda$. Also ist $Z \subset L_{\gamma+n}$ und es genuegt zu zeigen, dass $\gamma < \rho$.

Definiere dazu f' wie f aber ueber $L_{\gamma+n}$, statt ueber $L_{\lambda+n}$.

Das ist moeglich, weil $p = \pi[p] \in L_{\gamma+n}$.

Z ist transitiv, also insbesondere Δ_0 -Substruktur von $L_{\gamma+n}$.

Nach unserer Wahl von n' enthaelt $L_{\gamma+n}$ die ganze syntaktische Maschinerie, die zur Definition von $H_p^{\gamma+n}$ noetig ist.

Also ist $\text{rg } f' \supset L_Y$ und $f' \in L_{\gamma+n+1}$, d.h. $|\gamma|^\beta < \rho$. □

Als Anwendung von (RP_β) zeigen wir, dass die β -Kardinalitaet $|a|^\beta$ fuer jedes β und jedes $a \in L_\beta$ definiert ist.

Lemma 4 :

Seien $\lambda < \beta$ Limeszahlen, $n < \omega$. Dann existiert eine β -finite, injektive Funktion von $L_{\lambda+n}$ nach λ .

Beweis:

Per Induktion nach n .

$n = 0$: Nach Devlin D2 existiert eine λ -rekursive Funktion $f' : \lambda \rightarrow L_\lambda$, f' surjektiv. Sei f die Σ_1 -Uniformisierung von $(f')^{-1}$; f ist offenbar injektiv und β -finit wegen $\lambda < \beta$.

$n=m+1$: Sei $g : L_{\lambda+m} \rightarrow \lambda$ nach Induktionsannahme.
 $(\varphi_i)_{i < \omega}$ sei eine fixe Aufzaehlung der ZF-Formeln.

Sei $N : L_{\lambda+n} \rightarrow \omega$

$N(x) := \min(i \mid \text{ex. } p \in L_{\lambda+m} : \varphi_i(v, p) \text{ definiert } x \in L_{\lambda+m} \text{ ueber } L_{\lambda+m})$.

und $P : L_{\lambda+n} \rightarrow L_{\lambda+m}$

$P(x) := \text{<}_L\text{-min}(p \in L_{\lambda+m} \mid \varphi_{N(x)}(v, p) \text{ definiert } x \in L_{\lambda+m} \text{ ueber } L_{\lambda+m})$.

Also gilt fuer $x \in L_{\lambda+n}$

$x = \{ z \in L_{\lambda+m} \mid L_{\lambda+m} \models \varphi_{N(x)}(z, P(x)) \}$.

N und P sind β -finit.

Sei jetzt $f : L_{\lambda+n} \longrightarrow L_{\lambda}$, $f(x) := (N(x), g(P(x)))_s$.
 f ist offenbar β -finit und injektiv. Per $n=0$ folgt
 die Behauptung. □

Lemma 5 :

Sei $a \in L_{\beta}$. Dann existiert ein $\delta < \beta$ und eine β -finite
 Bijektion $f : \delta \longleftrightarrow a$.

Beweis:

Sei $\text{oBdA } \beta \text{ inadmissible}$. Also ist $\text{gc}\beta < \beta$ und wir koennen
 nach Lemma 4 annehmen, dass $a < \text{gc}\beta$. Betrachte die Haupt-
 funktion $f : \text{otp } a \longleftrightarrow a$.

Behauptung : f ist β -finit.

Zeige dazu fuer alle $\nu < \text{otp } a : f \upharpoonright \nu$ ist $\text{gc}\beta$ -finit.

Beweis hierfuer durch Induktion nach ν . Nachfolgerstufen
 sind trivial, sei also ν Limeszahl und fuer alle $\mu < \nu$
 $f \upharpoonright \mu$ $\text{gc}\beta$ -finit. Dann ist $f \upharpoonright \nu \Sigma_1\text{-}L_{\text{gc}\beta}$, deshalb β -finit
 und wegen (RP_{β}) $\text{gc}\beta$ -finit.

Waehle $\gamma < \beta$ mit $\text{gc}\beta < \gamma$ und $a \in L_{\gamma}$. Dann ist $f \Sigma_1\text{-}L_{\gamma}$ und
 somit β -finit. □

Lemma 6 :

Sei $a \in L_{\beta}$. Dann ist $|a|^{\beta} = \min(\delta < \beta \mid \text{ex. } f \in L_{\beta} \text{ bijektiv}$
 $f : \delta \longleftrightarrow a)$

Beweis:

Sei $\delta := \min(\dots)$. Nach Lemma 5 gilt $|a|^{\beta} \in \delta$. Also
 genuegt zu zeigen, dass δ β -Kardinalzahl ist.

Annahme : ex. $f \in L_{\beta}$, $f : \delta \longrightarrow \gamma$, f injektiv und $\gamma < \delta$.

Sei $\gamma \text{ oBdA } \beta\text{-Kardinalzahl}$, setze $a' := \text{rg } f$. Nach dem
 Beweis von Lemma 5 existiert ein β -finites $f' : \text{otp } a' \longleftrightarrow a'$,
 f' bijektiv; ferner ist $\text{otp } a' \leq \gamma < \delta$. Aber dann liefert
 $(f')^{-1} \circ f : \delta \longleftrightarrow \text{otp } a'$ einen Widerspruch zur Definition
 von δ . □

Bemerkung :

Wie im Beweis von (RP_β) zeigt man auch :

Jede β -Kardinalzahl ist β -stabil.

Denn sei $\rho < \beta$ β -KardZ, $a \in L_\rho$, $\varphi \Delta_0$ Formel mit $L_\beta \models \exists x \varphi(x, a)$. Wir haben zu zeigen, dass $L_\rho \models \exists x \varphi(x, a)$. Sei oBdA $\delta < \rho$ Limeszahl mit $a \in L_\delta$. Waehle ein $\gamma < \beta$ mit $L_\gamma \models \exists x \varphi(x, a)$. Im pathologischen Fall $\beta = \beta_0 + \omega$ kann a priori $L_{\beta_0} \models \neg \exists x \varphi(x, a)$ sein, d.h. $\gamma = \beta_0 + n$ ist dann Nachfolgerzahl und die Standard Skolem Funktionen stehen fuer L_γ nicht zur Verfuegung. Sei deshalb $Y := H^\gamma[\omega \times L_\delta]$, $Y_0 := Y \cap L_{\beta_0}$ und $\pi: Y \longleftrightarrow Z$ der Kollaps, Z transitiv. Nach Lemma 2[#] ist $Y_0 \prec_1 L_{\beta_0}$ und damit $\pi[Y_0] = L_\mu$ fuer ein $\mu \leq \gamma$. Also ist $Z \subset L_{\mu+n}$ und damit $Z \prec_0 L_{\mu+n}$. $\pi[H^\gamma]$ ist definierbar ueber $L_{\mu+n}$, fuer ein $n' > n$, somit ist $| \mu+n |^\beta = | \mu |^\beta < \rho$, d.h. $\mu < \rho$. Aber $Y \equiv Z \models \exists x \varphi(x, a)$, also $Z \prec_0 L_\rho \models \exists x \varphi(x, a)$.

Die Jensen-Hierarchie ist an dieser Stelle auch nicht hilfreich, die Schwierigkeiten treten hier fuer $\mathfrak{J}_{\nu+1}$ auf.

(0.2) DAS IDEAL VERALLGEMEINERTER ENDLICHER MENGEN
1-ENDLICHKEIT

Sei $\mathcal{L} = (L, B)$, $B \subseteq L$ regulaer.

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}} := \{ Y \mid Y \text{ } \mathcal{L}\text{-ra} \}$$

$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ ist ein distributiver Verband unter mengentheoretischer Inklusion. Fuer $X \subseteq L$ sei ferner

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(X) := \{ X \cap Y \mid Y \text{ } \mathcal{L}\text{-ra} \}.$$

Wir betrachten im Folgenden nur den Fall $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(X)$ ist dann ein Unterverband von $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

Im Spezialfall der klassischen Rekursionstheorie $\beta = \omega$, $B = \emptyset$ ist fuer X ra entweder $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(X) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ oder $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}(X)$ ist eine endliche boolesche Algebra. Der zweite Fall tritt genau dann auf, wenn jede ra Teilmenge von X schon rek ist. Das fuehrt zu folgender

Definition : Maass (siehe M2)

Sei $X \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$. X heisst 1-finit (1 fuer lattice) falls jede $\mathcal{L}$ -ra Teilmenge von X $\mathcal{L}$ -rek ist.

$$1\text{-Fin} := \{ Y \in \mathcal{E}_{\mathcal{L}} \mid Y \text{ 1-finit} \}.$$

1-Fin ist offenbar ein Ideal von $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$; sei $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^*$ der Faktorverband von $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ modulo 1-Fin.

1-Fin ist definierbar in der Sprache der Verbandstheorie ueber $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, Automorphismen von $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ veraendern 1-Fin also nicht. Beachte auch, dass 1-Fin alle endlichen Teilmengen von L enthaelt.

1-finite Mengen sind insbesondere deshalb interessant, weil viele rekursionstheoretische Begriffe invariant sind modulo 1-finiten Mengen und deshalb kanonische Definitionen ueber $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}^*$ besitzen. Zum Beispiel ist eine ra Menge M maximal gdw M^* , die Aequivalenzklasse von M in $\mathcal{E}_{\omega}^*$, ein Coatom in $\mathcal{E}_{\omega}^*$ ist.

Lerman hat diese Verbaende im Fall $\beta = \alpha$ admissible untersucht (siehe L1,L2,L3). Die 1-finiten Mengen sind hier gerade die α^* -finiten Mengen, d.h. die α -finiten Mengen mit α -Kardinalitaet kleiner als α^* . Er zeigt in L2 dass das Ideal 1-Fin in gewisser Weise eindeutig bestimmt ist; sein Beweis ist eine Verallgemeinerung eines Arguments von Lachlan fuer die klassische Rekursionstheorie. Es ist leicht zu sehen, dass der Beweis im Wesentlichen auch im inadmissible Fall arbeitet; wir haben deshalb :

Satz : Lachlan,Lerman

- (1) 1-Fin ist das einzige Ideal von $\mathcal{E}_\beta$, das nur aus β -rek Mengen besteht, alle endlichen Mengen in $\mathcal{E}_\beta$ enthaelt und definierbar ueber $\mathcal{E}_\beta$ ist.
- (2) Die elementaren Theorien von $\mathcal{E}_\beta$ und $\mathcal{E}_\beta^*$ sind gleichentscheidbar.

Im w.adm. Fall ist 1-Fin das einzige nicht-triviale, definierbare Ideal von β -finiten Mengen (siehe Kapitel 1). 1-finite Mengen sind also kanonische Objekte, die beim Studium von $\mathcal{E}_\beta$ auftreten. Im Folgenden geben wir alternative Charakterisierungen von 1-finiten Mengen. Zunaechst eine

Definition:

X β -ra heisst duenn falls die Σ_1^Δ -Kardinalitaet von X kleiner als β^* ist.

Lemma 1 :

Sei X β -ra. Dann sind aequivalent :

- (1) X ist 1-finit
- (2) X ist β -rek und $\mathcal{E}_\beta(X)$ ist eine Boolesche Algebra
- (3) X ist β -rek und duenn
- (4) Es existiert eine β -rek Permutation $P : L_\beta \longleftrightarrow L_\beta$ derart, dass fuer ein $\delta < \beta^*$: $P[\delta] = X$.

Beweis:

- (1 $\rightarrow$ 2) Beachte, dass fuer X β -rek und $Y \in \mathcal{E}_\beta(X) \subset \mathcal{E}_\beta$ gilt:
 Y hat ein Komplement in $\mathcal{E}_\beta(X)$ gdw
 Y hat ein Komplement in $\mathcal{E}_\beta$ gdw Y β -rek .

- (2 $\rightarrow$ 3) Beweis per Widerspruch. Annahme : $\delta := |X|^{\beta,1} < \beta^*$.
 Sei $f : \delta \longleftrightarrow X$ β -rek und $C \in \beta^*$ β -ra aber nicht β -rek. Setze $X_0 := f[C] \subset X$. Nach Voraussetzung hat X_0 ein Komplement in $E_\beta(X)$. Mit der letzten Bemerkung ist X_0 also β -rek. Aber dann ist auch C β -rek. Widerspruch.
- (3 $\rightarrow$ 4) Sei $\delta := |X|^{\beta,1} < \beta^*$. $Pf\delta$ ist die entsprechende β -rek Funktion $g : \delta \longleftrightarrow X$. Es bleibt zu zeigen :
 $|L_\beta - \delta|^{\beta,1} = |L_\beta - X|^{\beta,1}$.
 Offenbar ist $|A \cup B|^{\beta,1} \leq |A|^{\beta,1} + |B|^{\beta,1}$ also
 $\widehat{\beta} = |L_\beta|^{\beta,1} = |L_\beta - \delta|^{\beta,1} + |\delta|^{\beta,1}$ und damit
 $\widehat{\beta} = |L_\beta - \delta|^{\beta,1}$.
 Analog $\widehat{\beta} = |L_\beta - X|^{\beta,1}$.
- (4 $\rightarrow$ 1) Sei $Y \subset X$ β -ra; setze $d := P^{-1}[Y]$. d ist β -ra und $d \subset \delta < \beta^*$, per Σ_1 -Separation folgt d β -finit. Also ist $L_\beta - Y = P[L_\beta - d]$ β -ra, d.h. Y ist β -rek.



Lemma 2 :

Sei X β -ra, $X \subset \widehat{\beta}$. Dann sind äquivalent :

- (1) X ist dünn
- (2) $otp X$ ist kleiner als β^* .

Beweis:

- (1 $\rightarrow$ 2) Sei $\delta := |X|^{\beta,1} < \beta^*$ und $f : \delta \longleftrightarrow X$ β -rek.
 f induziert auf δ eine Wohlordnung vom Ordnungstyp $otp X$ per $i < j : \Leftrightarrow f(i) < f(j)$. $\prec$ ist Σ_1 - L_β und damit β -finit wegen Σ_1 -Separation. Wegen (RP_β) ist $\prec$ sogar β^* -finit. Aber β^* ist admissible und damit $otp X = otp \prec < \beta^*$.
- (2 $\rightarrow$ 1) Sei $\theta := otp X$ und $\delta := |X|^{\beta,1}$, $f : \delta \longleftrightarrow X$ β -rek.
 Beweis per Widerspruch.
 Annahme : $\delta \geq \beta^*$.

Fall 1 : β admissible

Falls β nicht-projezierbar ist muss X unbeschaenkt in $\beta = \hat{\beta}$ sein. Definiere g streng monoton per $g(\sigma) := f(\min(\tau \mid \text{fuer alle } \sigma' < \sigma: g(\sigma') < f(\tau)))$. Also ist $\text{dom } g = \beta$ und damit $\text{otp}(rg \ g) = \beta = \beta^*$. Aber $rg \ g \subset X$. Widerspruch.

Falls β projezierbar ist, ist $f[\beta^*]$ eine β -finite Teilmenge von X ; β^* ist eine β -Kardinalzahl, also ist $\text{otp}(f[\beta^*])$ mindestens β^* . Widerspruch.

Fall 2 : β weakly inadmissible

Nach Voraussetzung ist $X \subset \beta = \kappa$ und κ ist Σ_1^β -regulaer. Der Beweis verlaeuft deshalb genau wie in Fall 1.

Fall 3 : β strongly inadmissible

Betrachte die Aufzaehlung von X , die von f induziert wird : $X^\sigma := \{x \in X \mid L_q(\sigma) \models \exists i f(i) = x\}$. Setze $\text{st}(x) := \min(\sigma < \kappa \mid x \in X^\sigma - X^{<\sigma})$. st ist partiell β -rek, $\text{dom st} = X$, $rg \text{ st} \subset \kappa$.

Fuer $a \in L_\beta$ sei P_a die Hauptfunktion von a in Bezug auf die kanonische Wohlordnung von L_β . Fuer $a \in \beta^*$ ist P_a β -finit, $a \mapsto P_a$ ist ebenfalls β -finit.

Sei jetzt $F : \beta^* \rightarrow \theta = \kappa$ definiert per $F(i) := (P_{X^{\text{st}(f(i))}}^{-1}(f(i)), \text{st}(f(i)))$.

Also ist $X^\sigma - X^{<\sigma} = F^{-1}[\theta \times \{\sigma\}]$.

F ist offenbar β -rek und injektiv, nach der Definition von β^* ist also $|\theta \times \kappa|^\beta \geq \beta^*$.

Aber $\theta, \kappa < \beta^*$. Widerspruch.



Bemerkung:

Man kann zeigen, dass Lemma 2 auch fuer beliebige β -ra Teilmengen von L_β gilt. In der Tat arbeitet der obige Beweis in allen Faellen mit Ausnahme eines einzigen : $\beta^* = \kappa < \beta$. In diesem Fall scheint die Verwendung von pseudostabilen Ordinalzahlen unentbehrlich zu sein, wir verschieben den Beweis deshalb auf Kapitel 2.

Wie in der Verbandstheorie ueblich heisst $X \in \mathcal{E}_\beta$ β -simple falls

$$\mathcal{E}_\beta^* \models X^* \neq \Pi \ \& \ \forall Y (X^* \cap Y = \emptyset \rightarrow Y = \emptyset) \ .$$

In Fl konstruiert Friedman fuer alle β eine β -ra Menge S mit $L_\beta - S \subset \beta^*$, die im folgenden Sinne simple ist :

$$(1) \quad \text{otp}(L_\beta - S) = \beta^*$$

(2) fuer jedes $A \subset \beta^*$ β -ra und unbeschraenkt gilt $A \cap S \neq \emptyset$.

Dieses S ist auch β -simple.

Denn $\mathcal{E}_\beta^* \models S^* = \Pi$ wuerde bedeuten, dass $S \Delta L_\beta = L_\beta$. $\therefore S$ 1-finit ist. Aber dann ist nach Lemma 0.2.1 und 0.2.2

$\text{otp}(L_\beta - S) < \beta^*$ im Widerspruch zu (1).

Sei weiter Y β -ra mit $Y \cap S$ 1-finit. Dann ist $Y' := Y - (Y \cap S)$ β -ra und damit nach (2) beschraenkt in β^* (beachte, dass $Y' \subset \beta^*$). Mit Σ_1 Separation und (RP_β) ist Y' β^* -finit und nach Lemma 0.2.1 1-finit. Also ist auch $Y = Y' \cup (Y \cap S)$ 1-finit.

Somit gilt das folgende

Lemma : Friedman

Sei β beliebig. Dann existiert eine β -simple Menge.

KAPITEL 1

DER WEAKLY ADMISSIBLE FALL

Arbeiten von Friedman und Maass zeigen, dass fuer w.adm. viele Ideen und Beweismethoden aus der α -Rekursionstheorie auf β -Rekursionstheorie uebertragen werden koennen. So kann zum Beispiel Shore-Blocking zur Loesung von Post's Problem verwendet werden (siehe Fl). Ein Versuch, die Aehnlichkeit der adm. und der w.adm. Situation systematisch auszunutzen wurde in M1 unternommen. Maass definiert dort den admissible Kollaps α_β von L_β : $\alpha_\beta := \langle L_\beta, D \rangle$ ist eine adm. Struktur mit einem Zusatzpraedikat, das die β -ra Mengen kodiert. Der Maass-Kollaps wurde urspruenglich eingefuehrt, um das Studium der β -ra Grade zu erleichtern, er kann auch im Bereich des Verbandes $\mathcal{E}_\beta$ verwendet werden (siehe M1 fuer die Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit β -Graden auftreten).

(1.0) DER MAASS-KOLLAPS UND 1-FINITE MENGEN

Vereinbarung :

Sei im ganzen Kapitel 1 β eine w.adm. Ordinalzahl.

Also ist $\beta^* \leq \kappa \leq \beta$, $\hat{\beta} = \kappa$.

Definition :

Sei $D \subset \hat{\beta}$. D heisst Δ_1 Master Kode (Δ_1 MK) fuer L_β falls

(1) D ist Δ_1 - L_β

(2) Fuer $X \subset \hat{\beta}$ gilt : X ist Σ_1 - L_β gdw X ist Σ_1 - $\langle L_\beta, D \rangle$.

Sei D ein Δ_1 MK fuer L_β , dann heisst

$\alpha_\beta := \langle L_\beta, D \rangle$ Maass-Kollaps von L_β .

Bemerkung :

Die folgende, einfache Beobachtung ist der Schluessel fuer die Anwendung von α_β im Zusammenhang mit $\mathcal{E}_\beta$. Es ist $\hat{\beta} = \kappa$, sei deshalb P eine β -rek Bijektion $P : L_\beta \leftrightarrow L_\kappa$.
Fuer $X \in \mathcal{E}_\beta$ sei $Q(X) := P[X]$.

Dann ist $Q : \mathcal{E}_\beta \longrightarrow \mathcal{E}_{\alpha_\beta}$ ein Verbandsisomorphismus.

Fuer $X \in \mathcal{E}_\beta$ ist naemlich $Q(X) = P[X] \beta$ -ra und damit α_β -ra nach Definition von α_β , d.h. $Q(X) \in \mathcal{E}_{\alpha_\beta}$. Q ist trivialerweise injektiv. Sei schliesslich $Y \in \mathcal{E}_{\alpha_\beta}$, Y ist dann auch β -ra und somit $X := P^{-1}[Y] \beta$ -ra und $Q(X) = Y$.

Die Definition eines Δ_1 MK macht auch im s.inad. Fall Sinn; Δ_1 MKs existieren dann genau wenn $\text{Glcf } \beta^* = \kappa$ (siehe Kap.2 fuer diesen Fall).

Im w.adm. Fall erhaelt man einen Δ_1 MK wie folgt :

Sei $p(\beta) := \min \{ p \in L_\beta \mid SH_1(\beta^*, p; L_\beta) = L_\beta \}$.

Ein solches p existiert nach Fakt 3. Also ist jedes $a \in L_\beta$ Σ_1 definierbar ueber L_β mit Parametern aus $\beta^* \cup \{p(\beta)\}$.

Sei $p := p(\beta)$ und sei $\phi(u, v)$ eine Σ_1 Formel, die das universelle Σ_1 Praedikat $U_1(u, v)$ ueber L_β definiert.

$D := \{ \langle e, x, \sigma \rangle \mid e, x < \beta^* \text{ \& } \sigma < \kappa \text{ \& } L_{q(\sigma)} \models \phi(\langle e, x \rangle, p) \}$.

$D < \kappa$ ist regulaer fuer L_κ wegen $\hat{\beta} = \kappa$, Fakt 2, (RP_β) und $D \Delta_1$ - L_β . Sei also $\alpha_\beta := \langle L_\kappa, D \rangle$.

Sei $R \subseteq L_\kappa \times \kappa$, $R(d, \delta) :\Leftrightarrow d = D \cap \delta$.

Behauptung : $R(d, \delta) \Leftrightarrow$ es existiert ein $\tau < \kappa$ derart, dass $L_q(\tau) \models \forall z < \delta (z \in d \Leftrightarrow \exists e, x, \sigma (\langle e, x, \sigma \rangle = z \text{ \& } L_{q(\sigma)} \models \phi(\langle e, x \rangle, p)))$.

$\Leftarrow$ ist trivial, fuer $\Rightarrow$ beachte, dass fuer $\delta < \kappa$ stets $\{ \sigma \mid \exists e, x (\langle e, x, \sigma \rangle < \delta) \}$ beschaenkt ist in κ .

Also ist $R \beta$ -ra und damit Σ_1 - $\alpha_\beta \subseteq \Sigma_1$ - L_β . Sei $X < \kappa \beta$ -ra. Dann existiert nach Wahl von p ein $e < \beta^*$ mit

$\forall x < \kappa (x \in X \Leftrightarrow \exists \sigma < \kappa (\langle e, x, \sigma \rangle \in D))$.

Unser Kodierungsschema ist nach Kap.0 Σ_1 - L_κ also insbesondere α_β -ra. Damit ist $X \alpha_\beta$ -ra und insgesamt $D \Delta_1$ MK.

κ ist nach Definition Σ_1^β regulaer, wegen $D \Delta_1$ MK also auch $\Sigma_1^{\alpha_\beta}$ regulaer, d.h. α_β ist admissible.

Sei $\mathcal{E}$ ein Verband vom Typ $\mathcal{E}_\beta(X)$.

Wir schreiben bisweilen $\mathcal{E}$ -l-finit um hervorzuheben, dass wir ueber l-finite Mengen im Sinne von $\mathcal{E}$ sprechen. Analog $\mathcal{L}$ -l-finit fuer $\mathcal{E}_\beta$ -l-finit, β -l-finit fuer $\mathcal{L}_\beta$ -l-finit.

Fuer $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\alpha$ hat Lerman die l-finiten Mengen als die α^* -finiten charakterisiert. Wir nennen deshalb $X \in \mathcal{L}_\beta$ $\mathcal{L}$ -l * -finit falls $|X|^\beta < \mathcal{L}^*$.

Sei $\mathcal{L}$ -l * -Fin := $\{ X \in \mathcal{L}_\beta \mid X \text{ } \mathcal{L}\text{-l}^*\text{-finit} \}$.

Im w.adm. Fall haben wir folgende Charakterisierung von l-finiten Mengen.

Lemma 1 :

Sei β w.adm., dann sind aquivalent fuer X β -ra :

- (1) X ist β -l-finit
- (2) $\mathcal{E}_\beta(X)$ ist eine boolesche Algebra
- (3) X ist duenn
- (4) X ist β^* -finit
- (5) X ist β -finit und otp $X < \beta^*$.

Beweis:

(1 $\rightarrow$ 2) Siehe Lemma 0.2.1

(2 $\rightarrow$ 3) Sei $\delta := |X|^{\beta,1}$. Annahme : $\delta \geq \beta^*$.

Nach Kap.0 ist δ eine β -KardZ und $\delta \leq \kappa$. Also ist $\delta = \beta^*$ oder $\delta = \kappa$ und damit $\mathcal{E}_\beta(X) \cong \mathcal{E}_\beta(\beta^*)$ oder $\mathcal{E}_\beta(X) \cong \mathcal{E}_\beta$. Aber $\mathcal{E}_\beta$ ist offenbar keine boolesche Algebra, ferner existiert ein $C < \beta^*$ mit C β -ra aber nicht β -rek, d.h. $\mathcal{E}_\beta(\beta^*)$ ist ebenfalls keine bool. Algebra. Widerspruch.

(3 $\rightarrow$ 4) Sei $\delta := |X|^{\beta,1}$, $f : \delta \leftrightarrow X$ eine Aufzaehlung.

Es ist $\delta < \beta^* \leq \kappa$, also ist per Σ -Kollektion f β -finit und damit X β^* -finit.

(4 $\rightarrow$ 5) Sei δ, f wie zuvor. X induziert per f auf δ eine β -finite Wohlordnung vom Ordnungstyp otp X .

Wegen $\delta < \beta^*$ und β^* β -KardZ folgt die Behauptung.

- (5→1) X ist β -finit, also ist $|X|^\beta \leq \text{otp } X < \beta^*$. Aber dann ist X insbesondere duenn und die Behauptung folgt aus Lemma 0.2.1 . □

Lemma 2 :

Sei $X \in \mathcal{E}_\beta$, dann ist $\mathcal{E}_\beta(X)$ isomorph zu einem der folgenden Verbaende :

- (1) $\mathcal{P}(\rho) \cap L_{\beta^*}$ fuer eine β -KardZ $\rho < \beta^*$
- (2) $\mathcal{E}_\beta(\beta^*)$
- (3) $\mathcal{E}_\beta$.

Beweis:

In der Bemerkung oben wurde im wesentlichen gezeigt, dass $\mathcal{E}_\beta(X) \cong \mathcal{E}_\beta(\rho)$ wo $\rho := |X|^{\beta,1}$. Nach Kap.0 ist $\rho \in \{ \gamma \mid \gamma \text{ } \beta\text{-KardZ, } \gamma \leq \beta^* \text{ oder } \gamma = \kappa \}$.

Fuer $\rho = \kappa$ haben wir wegen $\kappa = \beta$ Fall (3), fuer $\rho = \beta^*$ Fall (2). Falls schliesslich $\rho < \beta^*$ ist wegen Σ_1 Separation und (RP_β) $\mathcal{E}_\beta(\rho) = \mathcal{P}(\rho) \cap L_{\beta^*}$.

Siehe Kap.1.2 fuer ein Beispiel, dass fuer manche β $\mathcal{E}_\beta(\beta^*) \neq \mathcal{E}_\beta$. □

Lemma 3 :

Sei $Q : \mathcal{E}_\beta \longrightarrow \mathcal{E}_{\alpha_\beta}$ wie in der Bemerkung, es gilt :

- (1) $\alpha_{\beta-1}\text{-Fin} = \alpha_{\beta-1}^*\text{-Fin}$
- (2) $\alpha_{\beta-1}\text{-Fin} = \beta\text{-1-Fin} \cap L_\kappa$
- (3) $\alpha_{\beta-1}\text{-Fin} = Q[\beta\text{-1-Fin}]$.

Beweis:

Beachte zunaechst, dass $\alpha_\beta^* = \sigma_{lp}^{\alpha_\beta}(\kappa) = \sigma_{lp}^{L_\beta}(\kappa) = \sigma_{lp}^{L_\beta}(\beta) = \beta^*$ weil $D \Delta_1$ MK . Es folgt, dass auch α_β ein Modell von Σ_1 Separation unterhalb von α_β^* ist: jede α_β -ra Menge $A \subset \delta < \alpha_\beta^*$ ist α_β -finit. Die Beweise von Lemma 0.2.1 und 1.1.1 sind deshalb auch fuer α_β gueltig und (1) folgt.

Die Richtung von links nach rechts in (2) folgt aus (1) und Lemma 1. Fuer die Gegenrichtung sei $X \in \beta\text{-l-Fin} \cap L_\kappa$. Nach Lemma 1 ist $|X|^\beta < \beta^*$, also $f: \delta \hookrightarrow X$ fuer ein $f \in L_\beta$, $\delta < \beta^*$. Wegen κ β -regulaer folgt $f \in L_\gamma$ fuer ein $\gamma < \kappa$. Per (RP_β) folgt $f \in L_\kappa$ und nach (1) ist X $\mathcal{O}_\beta$ -l-finit.

(3) folgt aus der Definierbarkeit von l-Fin und der Tatsache, dass Q ein Verbandsisomorphismus ist. □

(1.1) MAXIMALE MENGEN

Definition :

Sei $\mathcal{E}$ ein Verband vom Typ $\mathcal{E}_\beta(X)$, $X \in \mathcal{E}_\beta$. Fuer $Y \in \mathcal{E}_\beta(X)$ sei $\bar{Y} := X - Y$. Sei $M \in \mathcal{E}_\beta(X)$.

M heisst $\mathcal{E}$ -maximal falls $\bar{M}$ nicht $\mathcal{E}$ -l-finit ist aber fuer jedes $Y \in \mathcal{E}$ gilt : $Y \cap \bar{M}$ oder $\bar{Y} \cap \bar{M}$ ist $\mathcal{E}$ -l-finit.

Wir schreiben wieder $\mathcal{L}$ -maximal statt $\mathcal{E}_\beta$ -maximal, zuweilen auch einfach maximal.

Offenbar ist M maximal gdw M^* , die Aequivalenzklasse von M in $\mathcal{E}^* := \mathcal{E} / \mathcal{E}\text{-l-Fin}$, ist ein Koatom in $\mathcal{E}^*$.

In der klassischen Rekursionstheorie spielen maximale Mengen eine zentrale Rolle bei der Untersuchung von $\mathcal{E}_\omega$, z.B. im Beweis der Entscheidbarkeit der Π_2^0 -Saetze der elementaren Theorie von $\mathcal{E}_\omega$ oder bei der Konstruktion komplizierter Automorphismen von $\mathcal{E}_\omega$. In L3 hat Lerman die adm. α charakterisiert, fuer die die α -maximale Mengen existieren. Er verwendet dazu eine spezielle Hierarchie $(S_n | n < \omega)$ von Funktionen. Die geeignete Verallgemeinerung in unserem Kontext liefert die folgende

Definition :

Sei $\gamma, \delta \leq \beta$, $f: \gamma \rightarrow \delta$ eine Funktion, $n \geq 2$.

Sei $f': \kappa^{n-1} \times \gamma \rightarrow \delta$ eine $\mathcal{L}$ -rek Funktion.

f' induziert f als S_n^{β} Funktion falls gilt : fuer alle $x < \gamma$
 $f(x) = \lim_{\sigma_1 \rightarrow \kappa} \lim_{\sigma_2 \rightarrow \kappa} \dots \lim_{\sigma_n \rightarrow \kappa} f'(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, x)$.

Die Limites verstehen sich hierbei bzgl. der diskreten Topologie. f heisst in diesem Fall S_n^{β} Funktion.

$\text{snp}^{\beta}(\delta) := \min(\gamma \mid \text{ex. } f \in S_n^{\beta} \text{ mit } \text{dom } f = \gamma \text{ und } \text{rg } f = \delta)$
 Die entsprechende Funktion heisst S_n^{β} Projektion.

Bemerkung :

- (1) Es ist leicht zu sehen, dass jede S_n^{β} Funktion $\Sigma_n - L_{\beta}$ ist. Fuer β w.adm. und $n=2$ gilt die Umkehrung : jede $\Sigma_2 - L_{\beta}$ Funktion ist auch S_2^{β} . Nach Simpson S existiert aber ein adm. α und eine $\Sigma_3 - L_{\alpha}$ Funktion f derart, dass f nicht S_n^{α} ist fuer alle $n < \omega$.
- (2) $\text{s3p}^{\alpha}(\kappa) = \text{s3p}^{\beta}(\beta)$
 Sei naemlich $g : \kappa \leftrightarrow \beta$ β -rek Bijektion, $\pi_1 := \text{s3p}^{\beta}(\beta)$,
 $\pi_2 := \text{s3p}^{\alpha}(\kappa)$ und $f : \pi_2 \rightarrow \kappa$ eine entsprechende Projektion, f S_3 induziert durch $f' : \kappa \times \kappa \times \pi_2 \rightarrow \kappa$
 Dann induziert $g \circ f'$ eine S_3^{β} Projektion, also ist
 $\pi_2 \geq \pi_1$; analog fuer $\pi_1 \geq \pi_2$.

Beachte, dass S_n Projektionen im Gegensatz zu Σ_n Projektionen stets total sind.

Nach Lemma 1.0.3 gilt fuer $M \in \mathcal{E}_{\beta}$ mit $\overline{M} \subset \kappa : M$ β -maximal gdw M α_{β} -maximal. Die Konstruktion von α_{β} -maximalen Mengen verlauft aber genauso wie fuer adm. α . Umgekehrt ist fuer den Isomorphismus Q aus Kap.1.0 und $M \in \mathcal{E}_{\beta}$ β -maximal trivialerweise $Q(M)$ α_{β} -maximal, im Sinne eines Nicht-Existenzresultats genuegt es also zu zeigen, dass es keine α_{β} -maximalen Mengen gibt. Hierzu kann man wieder den Beweis aus der α -Rekursionstheorie uebernehmen. Siehe L3 fuer einen Beweis von

Satz : Lerman

Es existiert eine α -maximale Menge gdw $\text{s3p}(\kappa) = \omega$.

Korollar :

β w.adm., es gilt :

Es existiert eine β -maximale Menge gdw $s3p^\beta(\beta) = \omega$.

Beweis:

Mit den vorausgegangenen Bemerkungen hat man :

Es existiert eine β -maximale Menge gdw

es existiert eine α_β -maximale Menge gdw

$s3p^{\alpha_\beta}(\kappa) = \omega$ gdw

$s3p^{L_\beta}(\beta) = \omega$.

(1.2) ISOMORPHIETYPEN VON $E_\beta(X)$

In Lemma 1.0.2 wurde gezeigt, dass fuer X β -ra $E_\beta(X)$ entweder eine boolesche Algebra und isomorph zu $\mathcal{P}(\rho) \cap L_\beta$ fuer eine β -KardZ $\rho < \beta^*$ oder aber isomorph zu $E_\beta(\beta^*)$ oder E_β ist. Falls $\beta^* = \kappa$ existieren also nur zwei Isomorphietypen; Beispiel fuer solche β sind nicht-projezierbare α , $\beta < \omega_1^{CK}$, $\chi_1 + \chi_1$. Owings hat gezeigt, dass fuer $\alpha := \omega_1^{CK}$ $E_\alpha \neq E_\alpha(\alpha^*)$. Wir zeigen im Folgenden, dass es ein inadmissible β gibt mit $E_\beta \neq E_\beta(\beta^*)$. Wir verwenden dazu Owings Klassifizierung von maximalen Mengen.

Sei M $\mathcal{E}$ -maximal, $\mathcal{E}$ wieder vom Typ $E_\beta(X)$. M heisst vom Typ I falls fuer alle $A \in \mathcal{E}(M)$ $\mathcal{E}(M)$ -maximal ein $B \in \mathcal{E}$ $\mathcal{E}$ -maximal existiert mit $A = B \cap M$. Andernfalls heisst M vom Typ II.

Offenbar ist "vom Typ I" definierbar ueber $\mathcal{E}$, es genuegt also ein β anzugeben mit $\beta^* < \kappa < \beta$ und

- (1) in E_β existiert eine maximale Menge vom Typ I
- (2) in $E_\beta(\beta^*)$ existieren hoechstens maximale Mengen vom Typ II.

Betrachte dazu das Beispiel aus Kap.0.1 :

$X := SH_1(\omega, \chi_1; L\chi_2)$, $\kappa : X \longleftrightarrow L_\beta$ der Mostowski-Kollaps.

Es ist $\beta^* = \omega$ und $\kappa = \kappa(\chi_1) < \beta$.

Nach Lemma 1.0.1 besteht 1-Fin also gerade aus den endlichen Teilmengen von L_β .

Behauptung 1 : $s2p^\beta(\beta) = \omega$

Sei dazu $f : \beta \rightarrow \omega$ eine β -rek Projektion, d.h. f injektiv.

Sei $A := \text{rg } f$. Definiere $g : \omega \rightarrow \beta$, g surjektiv per

$$g(n) := \begin{cases} f^{-1}(n) & \text{falls } n \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

g ist Σ_2 - L_β also S_2^β nach einer Bemerkung in Kap.1.1.

Ferner ist $\text{dom } g = \omega$ und die Beh. folgt.

Behauptung 2 : es existiert eine β -maximale Menge M mit $\bar{M} \subset \kappa$ unbeschränkt in κ .

Betrachte wieder den adm. Kollaps α_β von L_β . Nach Beh.1

und Kap.1.1 ist $s2p^{\alpha_\beta}(\kappa) = \omega$. In LS konstruieren Lerman und Simpson eine maximale Menge M fuer adm. α mit $s2p^\alpha(\alpha) = \omega$ derart, dass $\bar{M}$ unbeschränkt in α ist und $\text{otp } \bar{M} = \omega$.

Der Beweis uebertraegt sich wieder auf α_β ; sei also M'

α_β -maximal, $\bar{M}' \subset \kappa$ unbeschränkt und $\text{otp } \bar{M}' = \omega$. Setze

$M := M' \cup [\kappa, \beta[$, M ist β -maximal nach Kap.1.1 und hat die gewuenschten Eigenschaften.

Behauptung 3 : Sei $N \in \mathcal{E}_\beta(\omega)$ $\mathcal{E}_\beta(\omega)$ -maximal.

Dann ist N vom Typ II.

Annahme : N ist vom Typ I.

N ist $\mathcal{E}_\beta(\omega)$ -maximal, also insbesondere nicht β -finit.

Deshalb ist $|N|^{\beta,1} = \kappa$, sei $f : \kappa \rightarrow N$ eine Aufzaehlung.

Setze $A := f[M]$. A ist offenbar N -maximal, sei deshalb nach

Annahme $B \in \mathcal{E}_\beta(\omega)$ maximal mit $A = B \cap N$. Es ist wieder

$|B|^{\beta,1} = \kappa$, sei $g : \kappa \rightarrow B$ eine Aufzaehlung.

$(\omega - B) \cap (\omega - N)$ muss endlich sein, sonst waere wegen N maximal

$B \cap (\omega - N)$ endlich, d.h. $B \setminus A$ endlich und damit B nicht

$\mathcal{E}_\beta(\omega)$ -maximal. Sei also $\text{oBdA } \omega - B = N - A = f[M]$.

Definiere $h : \omega \rightarrow \kappa$ per

$$h(n) := \min\{\nu < \kappa \mid f(\nu) = n \text{ oder } g(\nu) = n\}$$

h ist β -rek und $\text{dom } h = \omega$. Aber $h[(\omega - B)] = f^{-1}[(\omega - B)]$

also $h[\omega - B] = \bar{M} \subset \kappa$ unbeschränkt. Widerspruch.

KAPITEL 2

DER STRONGLY INADMISSIBLE FALL

Im Fall $\kappa < \beta^*$ treten eine Reihe von Effekten auf, die keine Entsprechung in der α -Rekursionstheorie besitzen. So zeigt z.B. Friedman in F3, dass fuer manche s.inad. β nur drei β -ra Grade existieren. Wir untersuchen im Folgenden 1-finite Mengen fuer s.inad. β und zeigen, dass die Charakterisierung als duenne Mengen erhalten bleibt.

Vereinbarung :

Sei im ganzen Kapitel 2 β stets s.inad. .

Also ist $\kappa < \beta^* < \beta$ und $\hat{\beta} = \beta^*$.

- (2.0) Beachte, dass jetzt stets eine 1-finite Menge existiert, die nicht β -finit ist. Punkt (4) und (5) in Lemma 1.0.1 uebertragen sich somit nicht auf die s.inad. Situation. Sei dazu $q : \kappa \rightarrow \beta$ wie in Fakt 4, $A := \text{rg } q$. A ist nicht β -finit wegen $A \subset \beta$ unbeschraenkt und duenn wegen $\kappa < \beta^*$. Nach Lemma 0.2.1 genuegt es also zu zeigen, dass A β -rek ist. q ist stetig und streng monoton, also gilt :
 $x \notin A$ gdw $\exists \sigma < \kappa (q(\sigma) < x < q(\sigma+1))$ und A ist β -rek.
 Beispiele wie $\beta := \aleph_1 + \omega$, dass A sogar Δ_0 -L $_{\beta}$ sein kann; A ist also kein gutes Beispiel fuer eine β -infinite Menge. Wir betrachten deshalb $\mathcal{E}_{\beta}(\beta^*) \cong \mathcal{E}_{\beta}$. Beachte, dass
 $\mathcal{E}_{\beta}(\beta^*) \cap 1\text{-Fin} = \mathcal{E}_{\beta}(\beta^*)\text{-1-Fin}$.

Lemma 1 :

Sei $\beta^* \Sigma_1$ irregulaer.

Dann existiert ein $D \subset \beta^*$ derart, dass D 1-finit aber nicht β -finit ist.

Beweis:

Sei zunaechst $\lambda := \sigma \text{ lcf}^\beta(\beta^*)$, $\bar{\lambda} := \text{cof}^\beta(\beta^*)$ und $g : \lambda \longrightarrow \beta^*$, $\bar{g} : \bar{\lambda} \longrightarrow \beta^*$ die entsprechenden Kofinalitaetsfunktionen, also ist g β -rek und $\bar{g}$ β -finit. Es ist $\lambda \leq \bar{\lambda}$ nach Definition und $\lambda < \beta^*$ nach Voraussetzung.

Fall 1 : $\lambda = \bar{\lambda}$

Sei wie in Kap.1.0 $\Phi(u,v)$ eine zweistellige universelle Σ_1 Formel, $p := p(\beta)$. Sei weiter $K : \beta^* \longleftrightarrow L_{\beta^*}$ β -finit, $K_\delta := K(\delta)$. Fuer $\sigma < \kappa$ setze

$$C^\sigma := \{ \langle e, x \rangle \mid e, x < \beta^* \text{ \& } L_{q(\sigma)} \models \Phi(\langle e, x \rangle, p) \}$$

$$C := \bigcup_{\sigma < \kappa} C^\sigma.$$

$$D := \{ \langle \delta, v, \sigma \rangle \mid \delta < \beta^*, v < \lambda, \sigma < \kappa : K_\delta = C^\sigma \cap g(v) \}.$$

D ist offenbar β -rek. Sei $f : \lambda \times \kappa \longrightarrow \beta^*$ definiert per $f(v, \sigma) := \langle \kappa^{-1}(C^\sigma \cap g(v)), v, \sigma \rangle$. f ist β -rek und $\text{rf } f = D$. Also ist $|D|^{\beta,1} \leq |\lambda \times \kappa|^{\beta} < \beta^*$, d.h. D ist duenn und nach Lemma 0.2.1 1-finit.

Andererseits ist C eine vollstaendige β -ra Menge, also insbesondere nicht β -finit. Aber

$C = \bigcup \{ K_\delta \mid \exists v \lambda, \sigma < \kappa (\langle \delta, v, \sigma \rangle \in D) \}$, und D ist ebenfalls nicht β -finit.

Fall 2 : $\lambda < \bar{\lambda}$

Betrachte die folgende Funktion $h : \lambda \longrightarrow \bar{\lambda}$

$h(i) := \min \{ j < \bar{\lambda} \mid \bar{g}(j) > g(i) \}$. h ist β -rek und $\text{rg } h$ ist kofinal in β^* . $h < \lambda \times \bar{\lambda}$ kann nicht β -finit sein, wegen Σ_1 Separation folgt $\bar{\lambda} = \beta^*$. Sei

$g^\sigma := \{ (i, x) \mid L_{q(\sigma)} \models g(i) \approx x \} \subset \lambda \times \beta^*$. Wegen $\bar{\lambda} = \beta^*$ muss $\text{rg } g$ beschaenkt sein in β^* fuer alle $\sigma < \kappa$. Sei $G : \kappa \longrightarrow \bar{\lambda}$, $G(\sigma) := \sup(\text{rg } g^\sigma)$.

G ist somit eine β -rek Kofinalitaetsfunktion fuer β^* , es folgt $\lambda \leq \kappa$. Aber aus $\lambda < \kappa$ wuerde folgen, dass g β -finit ist im Widerspruch zu $\lambda < \bar{\lambda}$. Also ist $\lambda = \kappa$.

Sei $C = \bigcup_{\sigma < \kappa} C^\sigma$ wie im Fall 1. Setze

$$D := \{ \langle \delta, \sigma \rangle \mid \delta < \beta^*, \sigma < \kappa : K_\delta = C^\sigma \cap g(\sigma) \}.$$

Wie im Fall 1 zeigt man $|D|^{\beta,1} = \kappa < \beta^*$, D ist wieder β -rek und somit 1-finit. Wegen

$C = \bigcup \{ K_\delta \mid \exists \sigma < \kappa (\langle \delta, \sigma \rangle \in D) \}$ folgt wieder D β -infinite.



Lemma 2 :

Es sind äquivalent :

- (1) β^* ist Σ_1 regulär
- (2) $E_\beta(\beta^*) \cap 1\text{-Fin} \subset L_{\beta^*}$
- (3) $E_\beta(\beta^*) \cap 1\text{-Fin} = \{x \in L_{\beta^*} \mid x \subset \beta^* \text{ \& } |x|^{\beta^*} < \beta^*\}$.

Beweis:

- (1 $\rightarrow$ 2,3) Sei X 1-finit, $X \subset \beta^*$. Nach Lemma 0.2.1 ist X dünn, sei $f : \delta \longleftrightarrow X$ eine Aufzählung, $\delta := |X|^{\beta^*}, 1 < \beta^*$.

Nach Voraussetzung ist β^* Σ_1 regulär, also X beschränkt in β^* und damit β -finit wegen Σ_1 Separation. Es ist sogar f β -finit und somit β^* -finit wegen (RP_β) .

- (3 $\rightarrow$ 1) Ist trivial.

- (2 $\rightarrow$ 1) Annahme : β^* ist Σ_1 irregulär.

Nach Lemma 1 existiert dann D 1-finit, $D \subset \beta^*$, D nicht β -finit, Widerspruch.



Bemerkung :

- (1) Der Beweis von Lemma 1 zeigt, dass aus $\text{clcf } \beta^* < \text{cof } \beta^*$ schon $\kappa = \text{clcf } \beta^*$ und $\beta^* = \text{cof } \beta^*$ folgt.

Beispiele für Σ_1 reguläre β^* liefern die β , für die β^* β -NachfolgerkardZ ist. Für den Fall $\text{clcf } \beta^* < \text{cof } \beta^*$ siehe Fl.

- (2) Die Menge C im Beweis von Lemma 1 ist ein Σ_1 Master Kode (siehe D1 für eine Definition).

Die Menge D im Fall 2 ist ein Δ_1 Master Kode.

Betrachte dazu $N := \{K \in L_{\beta^*} \mid K \subset D\}$. N ist offenbar β -ra.

Nach M1 ist deshalb auch $\{K \in L_{\beta^*} \mid K \subset L_{\beta^*} - D\}$ β -ra und

$\langle L_{\beta^*}, D \rangle$ -ra Mengen sind β -ra. Andererseits kodiert D

alle β -ra Mengen : sei $X \subset \beta^*$ β -ra, dann existiert ein $e < \beta^*$ derart, dass für alle $x < \beta^*$ gilt

$x \in X$ gdw $\langle e, x \rangle \in C$ gdw

$\langle L_{\beta^*}, D \rangle \models \exists K (\langle e, x \rangle \in K \text{ \& } K \in \underline{D})$.

Beachte, dass D im Fall 1 ein Σ_1 MK (und damit kein Δ_1 MK) ist. Sei e und X wie in Bemerkung (2). Dann existiert ein $\nu < \lambda$ und ein $\gamma < \beta^*$ derart, dass fuer alle $x < \beta^*$ gilt $x \notin X$ gdw $\langle e, x \rangle \notin C$ gdw $\langle L_{\beta^*}, D \rangle \models \forall K \in L_\gamma, K = K_\delta, \sigma < \kappa (\langle e, x \rangle \in K \rightarrow \langle \delta, \nu, \sigma \rangle \in D)$. ν und γ koennen auf Σ_1 - $\langle L_{\beta^*}, D \rangle$ Weise aus e und x berechnet werden, also sind Σ_2 - L_β Teilmengen von $\beta^* \Sigma_1$ - $\langle L_{\beta^*}, D \rangle$. Fuer die Gegenrichtung siehe z.B. D1.

Lemma 3 :

Sei X β -ra, dann ist $\mathcal{E}_\beta(X)$ isomorph zu einem der folgenden Verbaende :

- (1) $\mathcal{P}(\rho) \cap L_{\beta^*}$ fuer eine β -KardZ $\rho < \beta^*$
- (2) $\mathcal{E}_\rho$

Beweis:

Es ist $\mathcal{E}_\beta(X) \cong \mathcal{E}_\beta(\rho)$ wo $\rho := |X|^{\beta,1}$. Wegen $\hat{\beta} = \beta^*$ ist $\rho < \beta^*$. Fuer $\rho = \beta^*$ haben wir Fall (2), fuer $\rho < \beta^*$ ist wieder wegen Σ_1 Separation und (RP_β) $\mathcal{E}_\beta(\rho) = \mathcal{P}(\rho) \cap L_{\beta^*}$. □

Die Situation ist hier also einfacher als im w.adm. Fall.

Wir haben also folgendes Bild :

Falls $\beta^* \Sigma_1$ regulaer ist, ist $\mathcal{E}_\beta$ isomorph zu einem Verband, in dem die 1-finiten Mengen gerade aus den Elementen von L_{β^*} bestehen. Andernfalls treten selbst als Teilmengen von β^* 1-finite Mengen auf, die nicht einmal β -finit sind.

Insbesondere existieren also duenne Teilmengen von β^* , die nicht β -finit sind. Es erhebt sich die Frage, ob man auch duenne Mengen angeben kann, die nicht β -rek sind. Das einfachste Verfahren zur Konstruktion von β -ra Mengen, die nicht β -rek sind, ist die uebliche simple set Konstruktion. Gesucht ist also ein $S < \beta^*$ β -ra mit $\beta^* - S$ ist nicht 1-finit aber fuer alle X β -ra gilt : $X \subset (\beta^* - S) \rightarrow X \in 1\text{-Fin}$. Dazu genuegt es, die folgenden Erfordernisse zu erfuellen :

(N) $\beta^* - S$ ist nicht 1-finit

(P_e) $w_e \cap \beta^*$ nicht 1-finit $\rightarrow w_e \cap S \neq \emptyset$, $e < \beta^*$.

Die Konstruktion von S verläuft dann in $\kappa \cdot \beta^*$ vielen Schritten; siehe Fl fuer Einzelheiten.

Um zu erreichen, dass S zusätzlich noch duenn ist, muss man das negative Erfordernis (N) verstaerken. Nach Lemma 0.2.2 genuegt es z.B. zu fordern :

(N') otp $S < \beta^*$.

Es scheint hoffnungslos zu sein, den Konflikt aufzuloesen, der dann zwischen (N') und den (P_e) entsteht. Falls z.B.

$\beta = \aleph_\omega + \omega$ muesste S weniger als $\aleph_\omega$ viele Elemente enthalten aber gleichzeitig $\aleph_\omega$ viele Erfordernisse (P_e) , $e < \aleph_\omega$, erfuellen.

Wir zeigen im Folgenden, dass in der Tat keine derartige Konstruktion moeglich ist. Der Rest von Kapitel 2 ist dem Beweis des folgenden Satzes gewidmet :

Satz 1 :

Sei $X < \beta^*$ β -ra.

Falls X duenn ist, ist X β -rek.

Satz 2 :

Sei X β -ra. Dann sind aequivalent :

- (1) X ist 1-finit
- (2) $E_\beta(X)$ ist eine boolesche Algebra
- (3) X ist duenn
- (4) otp $X < \beta^*$.

Beweis:

(1 $\rightarrow$ 2) Ist trivial.

(2 $\rightarrow$ 3) Annahme: X ist nicht duenn.

Nach Lemma 3 Beweis ist dann $E_\beta(X) \cong E_\beta$, also keine boolesche Algebra. Widerspruch.

(3 $\rightarrow$ 1) Sei $f : L_\beta \longleftrightarrow \beta^*$ β -rek, $Y := f[X]$. Nach Satz 1 ist Y und damit auch X β -rek. X ist duenn, also 1-finit nach Lemma 0.2.1.

(3 $\rightarrow$ 4) Das ist Lemma 0.2.2 zusammen mit der nachfolgenden Bemerkung.



(2.1) ZUM BEWEIS VON SATZ 1

Sei im Folgenden stets $\beta^* \Sigma_1$ irregulaer und sei $X \subset \beta^*$ β -ra und duenn. Also existiert eine β -rek Funktion $g : \lambda \rightarrow \beta^*$ wobei $\lambda := \text{elcf}^\beta(\beta^*) < \beta^*$ und $\text{rg } g \subset \beta^*$ unbeschaenkt. Nach dem Beweis von Lemma 2.0.1 koennen wir oBdA annehmen, dass g streng monoton ist. β^* ist nach Fl keine Nachfolger- β -KardZ und es ist $\beta^* < \beta$, sei deshalb oBdA $\alpha_v := g(v)$ eine β -KardZ fuer alle $v < \lambda$. $(\alpha_v | v < \lambda)$ ist meistens β -finit.

Sei weiter fuer $v < \lambda$

$$H_v := SH_1(\alpha_v, p(\beta); L_\beta) \cap \beta^*.$$

Wir schreiben wieder p fuer $p(\beta)$.

Beachte, dass H_v duenn ist. Sei naemlich

$$f := \{((i, x), y) \mid (i, x) \in \omega \times L_{\alpha_v}, y < \beta^* \text{ \& } h_p(i, x) = y\}.$$

Wegen $\alpha_v < \beta^*$ ist $D := \text{dom } f$ β -finit; in der Tat $|D|^\beta = \alpha_v$ also $|H|^\beta = |D|^\beta = |D|^\beta = \alpha_v < \beta^*$.

Lemma 1 :

$$\forall v < \lambda (H_v, 1\text{-finit}) \rightarrow X \beta\text{-rek}$$

Beweis:

Sei $\delta := |X|^{\beta, 1}$, $f : \delta \leftrightarrow X$ eine Aufzaehlung.

f ist β -rek also existiert ein $e < \beta^*$ mit $f \Sigma_1\text{-}\{e, p\}$.

Waehle ein $v < \lambda$ mit $e, v < \alpha_v$. Sei $Z := SH_1(\alpha_v, p; L_\beta)$, also

$$H_v = Z \cap \beta^*.$$

f ist $\Sigma_1\text{-}Z$ und wegen $\text{dom } f = \delta \subset Z$ ist $f \subset Z$.

Aber dann ist $X \subset H_v$ und H_v ist nach Vor. 1-finit, somit ist X ebenfalls 1-finit und insbesondere β -rek.



Wir haben gesehen, dass H_v duenn ist, es genuegt also zu zeigen, dass H_v auch β -rek ist. Beachte aber, dass H_v nicht uniform in $v < \lambda$ β -rek sein kann:

Annahme: $\Phi(x, u, v, w)$ ist eine parameterfreie Σ_1 Formel so, dass fuer ein $e < \beta^*$ und alle $v < \lambda$ gilt

$$x \in \beta^* - H_v \text{ gdw } L_\beta \models \Phi(x, v, e, p).$$

Wähle ν mit $\alpha_\nu > e, \nu$; es gilt mit $Z := SH_1(\alpha_\nu, p; L_\beta) \prec_1 L_\beta$
 $L_\beta \models \exists x \phi(x, \nu, e, p)$ gdw
 $Z \models \exists x \phi(x, \nu, e, p)$ sei also $a \in H_\nu$ mit
 $Z \models \phi(a, \nu, e, p)$ aber dann ist
 $L_\beta \models \phi(a, \nu, e, p)$ d.h. $a \notin H_\nu$, Widerspruch.

Vereinbarung:

Fixiere fuer den Rest von Kap.2 ein $\mu < \lambda$. μ sei hinreichend gross um zu garantieren, dass

- (1) $X \subset H_\mu$
- (2) $Z := SH_1(\alpha_\mu, p; L_\beta)$ enthaelt $q : \kappa \longrightarrow \beta$, $(\alpha_\nu \mid \nu < \lambda)$, die kanonische Wohlordnung $K : \beta^* \longleftrightarrow L_\beta^*$ usw. Es soll also sein $q \in Z$, $q \subset Z$, $K \in Z$ (aber selbstverstaendlich nicht $K \subset Z$!), $\kappa \subset Z$, $\lambda \subset Z$ usw. Endlich viele solcher Bedingungen sind offenbar stets erfuellbar.

Wir schreiben H statt H_μ . Wir haben zu zeigen, dass H β -rek ist, d.h. dass fuer eine parafreie Σ_1 Formel $\phi(x, u, v)$ und ein $e < \beta^*$ gilt $x \in \beta^* - H$ gdw $L_\beta \models \phi(x, e, p)$. Wir betrachten dazu spezielle Kollektionen von Σ_1 Formeln.

Definition : Σ_1 -eins-Typen

v sei eine fixierte, spezielle Variable. Fuer $x < \beta^*$ sei

$$T(x) := \{ \phi(v) \mid \phi \text{ } \Sigma_1 \text{ Formel mit Parametern aus } \alpha_\mu \cup \{p\} \text{ \& } \}$$

$$L_\beta \models \phi(x)$$

Wir betrachten $T(x)$ stets als Teilmenge von $\omega \times \alpha_\mu$. Verwende dazu eine Arithmetisierung der Sprache der Mengenlehre wie in D1. Fuer Konstanten $e < \alpha_\mu$ sei $(1, e)$ der Kode; kodiere p als $(13, 0)$.

Bemerkung :

- (1) $T(x)$ ist β -finit.

Denn die Erfuellungsrelation fuer Σ_1 Formeln ueber L_β ist Σ_1 - L_β , also ist $T(x)$ β -ra und damit β -finit per Σ_1 Separation.

- (2) $x \in H$ gdw fuer ein $i < \omega, e < \alpha_\mu$ ist $(h_p(i, e) \approx v) \in T(x)$
 $(h_p(i, e) \approx v)$ ist hier als Σ_1 Formel aufzufassen.
- (3) Nach Bem.(2) bestimmt $T(x)$ fuer $x \in H$ x eindeutig, d.h.
 $T(y) = T(x) \rightarrow x = y$. Das ist im allgemeinen nicht der
Fall. Betrachte dazu z.B. $\beta := \aleph_\omega + \omega$, $\alpha_\mu := \aleph_m$.
Dann ist $|\{T(x) \mid x < \aleph_{m+2}\}| < \aleph_{m+1}$, also existiert
 $E \subset \aleph_{m+2}$ stationaer mit $\forall x, y \in E (T(x) = T(y))$.
In Kap.2.2 geben wir ein explizites Beispiel fuer ein
 $x \notin H$, das durch $T(x)$ eindeutig bestimmt ist.

Heuristik

Sei wie in der letzten Bemerkung $\beta := \aleph_\omega + \omega$, $\alpha_\mu := \aleph_m$.

Dann ist $\beta^* = p(\beta) = \aleph_\omega, \kappa = \omega$. Sei

$$G' := \{T(x) \mid x \in \beta^* - H\}.$$

G' ist als beschraenkte Teilmenge von L_{β^*} β -finit und es gilt
 $\beta^* - H = \{x < \beta^* \mid T(x) \in G'\}$.

Das folgt sofort aus der Definition von G' und Bem.(2).

Die rechte Seite liefert natuerlich keine Σ_1 Definition
von $\beta^* - H$: $T: \beta^* \rightarrow \mathcal{P}(\omega \times \aleph_m)$, $x \mapsto T(x)$ ist keine
 β -rek Funktion. Wir approximieren $T(x)$ deshalb durch eine
 β -rek Funktion $T: \kappa \times \beta^* \rightarrow \mathcal{P}(\omega \times \aleph_m)$, $(\sigma, x) \mapsto T^\sigma(x)$
so, dass $T(x) = \bigcup \{T^\sigma(x) \mid \sigma < \kappa\}$.

Der Parameter G' wird modifiziert zu

$$G := \{T^\sigma(x) \mid x \in \beta^* - H \text{ \& } \sigma = \sigma(x) \text{ geeignet}\}.$$

G ist β -finit unabhaengig von der Kompliziertheit von $\sigma(x)$.

$$\text{Sei } A := \{x \in \beta^* \mid T^\sigma(x) \in G \text{ fuer ein } \sigma < \kappa\}.$$

A ist dann β -ra und jedenfalls $\beta^* - H \subset A$. Die wesentliche
Schwierigkeit besteht darin, sicherzustellen, dass auch
 $A \cap H = \emptyset$: Bem.(2) gilt nicht fuer $T^\sigma(x)$! Es kann a priori
passieren, dass fuer ein $x \in \beta^* - H, \sigma < \kappa$ $T^\sigma(x) = T^\sigma(\bar{x})$ aber
 $\bar{x} \in H$ fuer ein $\tau > \sigma$. Der Rest von Kap.2 ist dem Beweis ge-
widmet, dass dieses Problem fuer genuegend grosse σ nicht
auftritt.

Siehe Lemma 2.1.3 fuer einen Beweis, dass G fuer beliebige
 β -finit ist.

Definition :

Sei $x < \beta^*$, $\sigma < \kappa$.

$$T^\sigma(x) := \left\{ \varphi(v) \mid \varphi \sum_1 \text{ Formel mit Parametern aus } \alpha_\mu \cup \{p\} \ \& \right. \\ \left. L_{q(\sigma)} \models \varphi(x) \right\}$$

$$X^\sigma(x) := SH_1(\alpha_\mu, (x, p); L_{q(\sigma)})$$

$X^\sigma(x)$ und $X^\sigma(\bar{x})$ heissen streng isomorph ($X^\sigma(x) \cong X^\sigma(\bar{x})$)

falls ein $\in$ -Isomorphismus $f : X^\sigma(x) \longleftrightarrow X^\sigma(\bar{x})$ existiert

derart, dass $f \upharpoonright \alpha_\mu = \text{id}$, $f(p) = p$ und $f(x) = \bar{x}$.

Bemerkung :

$$(4) \quad T : \kappa \times \beta^* \longrightarrow L_{\beta^*} \quad \text{und}$$

$$(\sigma, x) \longmapsto T^\sigma(x)$$

$$X : \kappa \times \beta^* \longrightarrow L_\beta$$

$$(\sigma, x) \longmapsto X^\sigma(x)$$

sind β -rek Funktionen.

Bem.(4) ist offensichtlich, falls $q(\sigma)$ stets Limeszahl ist.

Im Fall $\beta = \beta_0 + \omega$ treten wie beim Beweis von (RP_β)

Probleme bei der Bildung von Skolem Huellen auf. Wir verwenden in diesem Fall die Funktionen $H_{(x,p)}^{q(\sigma)}$ aus Kap.0 zur Definition von $X^\sigma(x)$.

Wir benoetigen im Folgenden, dass $X^\sigma(x)$ und die Erfuellungsrelation fuer $X^\sigma(x)$ Elemente von $X^{\sigma+1}(x)$ sind. Wir vereinbaren deshalb folgende Eigenschaften fuer q :

$$- p \in L_{q(0)}$$

- falls β Limes von Limeszahlen ist sei $q(\sigma)$ stets eine solche

$$- \text{falls } \beta = \beta_0 + \omega \text{ sei } q(0) := \beta_0 + 1, q(n+1) := q(n) + 100.$$

Lemma 2 :

Sei $\sigma < \kappa$, $x, \bar{x} < \beta^*$. Es sind aequivalent :

$$(1) \quad T^\sigma(x) = T^\sigma(\bar{x})$$

(2) $X^\sigma(x)$ und $X^\sigma(\bar{x})$ sind streng isomorph.

Beweis:

(1 $\rightarrow$ 2) :

Nach Definition von $X^\sigma(x)$ existiert fuer jedes $a \in X^\sigma(x)$ ein $e_a \in \alpha_\mu$, $i < \omega$ mit $L_{q(\sigma)} \models h_{(x,p)}(i, e_a) \approx a$.

Sei $f(a) := h_{(\bar{x},p)}(i, e_a)$.

$h_{(\bar{x},p)}(i, e_a)$ konvergiert weil $(\exists z h_{(v,p)}(i, e_a) \approx z)$ in $T^\sigma(x)$ und damit nach Vor. auch in $T^\sigma(\bar{x})$ ist.

Analog zeigt man, dass f wohldefiniert und bijektiv ist.

Wir zeigen noch, dass f ϵ -treu ist.

Sei dazu $a, b \in X^\sigma(x)$, $a \epsilon b$. Dann ist

$\exists u, w (h_{(v,p)}(i, e_a) \approx u \ \& \ h_{(v,p)}(j, e_b) \approx w \ \& \ u \epsilon w)$ in $T^\sigma(x)$ also auch in $T^\sigma(\bar{x})$ und damit

$f(a) = h_{(\bar{x},p)}(i, e_a) \epsilon h_{(\bar{x},p)}(j, e_b) = f(b)$.

(2 $\rightarrow$ 1) :

Sei $f : X^\sigma(x) \longleftrightarrow X^\sigma(\bar{x})$ der entsprechende Isomorphismus und $\varphi(v)$ in $T^\sigma(x)$, d.h. $L_{q(\sigma)} \models \varphi(x)$. Wegen $X^\sigma(x) \triangleleft_1 L_{q(\sigma)}$ folgt $X^\sigma(x) \models \varphi(x)$. Aus der Definition von streng isomorph folgt $X^\sigma(\bar{x}) \models \varphi(x)$ und damit $\varphi(v) \in T^\sigma(\bar{x})$.

□

Die Relation $R(\sigma, x, \bar{x}) : \Leftrightarrow X^\sigma(x) \hat{=} X^\sigma(\bar{x})$ ist a priori extern, der Isomorphismus braucht nicht definierbar zu sein ueber L_β . Lemma 2 zusammen mit Bem.(4) sagt, dass R sogar β -rek ist.

Unser Ziel ist, in effektiver Weise Elemente von $\beta^* - H$ von solchen aus H zu unterscheiden. Wir machen deshalb folgende

Definition :

Sei $x \in \beta^* - H$, $\sigma < \kappa$.

x heisst unterscheidbar (unschb) auf Stufe σ falls fuer alle $z \in \beta^*$ gilt : $T^\sigma(x) = T^\sigma(z) \rightarrow z \notin H$.

x heisst unterscheidbar falls x fuer ein $\sigma < \kappa$ unterscheidbar auf Stufe σ ist.

Lemma 3 :

Sei jedes $x \in \beta^* - H$ unterscheidbar. Dann ist H β -rek.

Beweis:

Sei $G := \{ t \in L_{\beta^*} \mid t \in \omega \cdot \alpha_{\mu} \ \& \ \forall z < \beta^*, \sigma < \kappa (T^{\sigma}(z) = t \rightarrow z \notin H) \}$.

T ist β -rek mit $\text{dom } T = \kappa \times \beta^*$, also ist $T^{\sigma}(z) = t$ ein $\Delta_1 - L_{\beta}$ Praedikat von σ, z, t und G ist $\Pi_1 - L_{\beta}$. Per Σ_1 Separation unterhalb β^* folgt G β -finit.

Behauptung : $\beta^* - H = \{ z < \beta^* \mid \exists \sigma < \kappa (T^{\sigma}(z) \in G) \} =: A$

Denn sei $x \in \beta^* - H$. Nach Vor. ist x unschb, also existiert ein $\sigma < \kappa$ so, dass $T^{\sigma}(x) \in G$. Aber dann ist $x \in A$.

Sei umgekehrt $z \in A$, somit fuer ein $\sigma < \kappa$ $T^{\sigma}(z) =: t \in G$.

Aus der Definition von G folgt sofort $z \in H$.

Die rechte Seite der Beh. ist nach Bem.(4) und wegen G β -finit eine Σ_1 Definition von $\beta^* - H$.



Zurueck zum Beweis von Satz 1. Nach Lemma 1 haben wir nur zu zeigen, dass $H = H_{\mu}$ β -rek ist, nach Lemma 3 genuegt es hierfuer zu zeigen, dass jedes $x \in \beta^* - H$ unterscheidbar ist. In F2 und F3 verwendet Friedman Fixpunkte von Skolem Huellen zur Untersuchung von Post's Problem, er nennt solche Ordinalzahlen pseudo-stabil. In Kap.2.2 leiten wir einige elementare Eigenschaften von pseudo-stabilen Ordinalzahlen ab und zeigen, wie unser Problem auf pseudo-stabile $e \in \beta^* - H$ zurueckgefuehrt werden kann. In Kap.2.3 beenden wir den Beweis von Satz 1.

Die Informationen ueber pseudo-stabile Ordinalzahlen koennen auch dazu verwendet werden, Lemma 0.2.2 auf beliebige Teilmengen von L_{β} zu verallgemeinern : $X \subset L_{\beta}$ β -ra ist duenn gdw otp $X < \beta^*$. Wir tun das in Kap.2.4.

(2.2) PSEUDO - STABILITAET

Stabile Ordinalzahlen sind die Fixpunkte von Skolem Huelen in $L : \alpha$ stabil gdw $\alpha \notin SH_1(\alpha, \emptyset; L)$. Die geeignete Verallgemeinerung auf L_β lautet wie folgt (siehe auch F2, F3) :

Definition : Friedman

Sei $p := p(\beta), \gamma < \beta^*, \sigma < \kappa$.

γ heisst β, σ -pseudo-stabil falls $\gamma \notin SH_1(\gamma, p; L_{q(\sigma)})$.

γ heisst β -pseudo-stabil falls $\gamma \notin SH_1(\gamma, p; L_\beta)$.

γ heisst Limes- β -pseudo-stabil falls γ das Supremum kleinerer β -pseudo-stabiler OrdZ ist und Nachfolger- β -pseudo-stabil sonst.

Wir lassen haeufig β weg und schreiben σ -pstab, pstab, L-pstab und N-pstab.

Betrachte $X := SH_1(\gamma, p; L_\beta)$ und den Mostowski-Kollaps

$\pi : X \longleftrightarrow L_\beta$. Sei $c(\gamma) := \delta$.

$$\tilde{\gamma} := \begin{cases} \max\{\gamma \mid L_\gamma \models (\gamma \text{ ist KardZ}) & \text{falls } \gamma \text{ keine } \beta\text{-KardZ} \\ \beta^* & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei noch $PS_\beta := \{\gamma < \beta^* \mid \gamma \text{ } \beta\text{-pstab}\}$.

Lemma 1 :

Sei $\gamma < \beta^*$ keine β -KardZ. Dann sind aequivalent :

(1) γ ist pseudo-stabil

(2) $L_{c(\gamma)} \models (\gamma \text{ ist KardZ})$, d.h. $c(\gamma) \in \tilde{\gamma}$.

Beweis:

(1 $\rightarrow$ 2) :

Betrachte den Kollaps $\pi : X \longleftrightarrow L_\beta$ wobei $X := SH_1(\gamma, p; L_\beta)$ und $\delta := c(\gamma)$. Sei $\alpha := \min(\alpha \in X \mid \alpha > \gamma)$. γ ist pstab also $\pi(\alpha) = \gamma$ und es genuegt zu zeigen, dass α eine β -KardZ ist. Annahme : $\eta := |\alpha|^\beta < \alpha$. Aber dann ist und wegen $X \prec_1 L_\beta$ existiert ein $f \in X$, $f : \eta \longleftrightarrow \alpha$. Es ist $\text{dom } f \subset X$ also auch $\text{rg } f \subset X$; aber daraus folgt $\gamma \in X$.

Widerspruch.

(2 $\rightarrow$ 1) :

Sei wieder $\pi : X \longleftrightarrow L_\beta$. γ ist eine δ -KardZ, somit $\rho := \pi^{-1}(\gamma)$ eine β -KardZ weil $X \prec_1 L_\beta$. Aber γ ist nach Vor. keine β -KardZ, also $\rho > \gamma$. Es folgt γ pstab, denn aus $\gamma \in X$ wuerde $\gamma = \pi^{-1}(\gamma)$ folgen : $\gamma + 1$ ist transitiv und damit $\pi \upharpoonright \gamma + 1 = \text{id}$. □

Bemerkung :

Sei $\rho < \beta^*$ eine β -KardZ und ρ^+ die naechste β -KardZ, $J := [\rho, \rho^+]$.

(1) Sei $\gamma \in J$, $X := SH_1(\gamma, p; L_\beta)$, $e := X \cap \rho^+$.

Dann ist e die kleinste pstab groesser als γ .

Beachte, dass e wegen $X \prec_1 L_\beta$ OrdZ ist. $\rho^+ < \beta^*$ ist Σ_1 regulaer, also $e < \rho^+$. Ferner $e \notin X = SH_1(e, p; L_\beta)$, d.h. e ist pstab. Aber fuer alle $\bar{e}, \gamma < \bar{e} < e$ ist $\bar{e} \in X = SH_1(\bar{e}, p; L_\beta)$ und $\bar{e}$ nicht pstab.

(2) Sei $\rho < \gamma < \rho^+$ und $\gamma = \sup\{e \mid PS_\beta \ni e < \gamma\}$. Dann ist γ pstab.

Fuer $e \in PS_\beta \cap [\rho, \gamma]$ ist offenbar $SH_1(e, p; L_\beta) \cap [e, \rho^+] = \emptyset$ und damit $\gamma \notin SH_1(\gamma, p; L_\beta) = \bigcup \{SH_1(e, p; L_\beta) \mid e < \gamma, e \in PS_\beta\}$.

(3) $PS_\beta \cap J$ ist nach (1) und (2) abgeschlossen und unbeschaenkt in ρ^+ . Beachte aber, dass PS_β nicht abgeschlossen ist : β -KardZ sind im allgemeinen nicht pstab aber nach (1) Limes von pstab Ordinalzahlen.

(4) PS_β ist nach Definition π_{1-L_β} . PS_β ist nicht Σ_{1-L_β} :
Annahme: $x \in PS_\beta$ gdw $L_\beta \models \Phi(x, a, p)$ wobei Φ eine parameterfreie Σ_1 Formel und $a < \beta^*$ ist. Sei $\nu < \lambda$ so, dass $a < \alpha_\nu$ und sei e die kleinste pstab $> \alpha_\nu$. Also ist $PS_\beta \cap [\alpha_\nu, e] = \emptyset$ aber mit $X := SH_1(e, p; L_\beta)$ $X \models \exists x (\alpha_\nu < x < \alpha_\nu^+ \ \& \ \Phi(x, a, p))$ weil $X \prec_1 L_\beta$. Aber $X \cap [\alpha_\nu, \alpha_\nu^+] \subset [\alpha_\nu, e]$, also ist fuer ein $\bar{e} \in X$, $\bar{e} \notin PS_\beta$
 $X \models \Phi(\bar{e}, a, p)$ und damit $L_\beta \models \Phi(\bar{e}, a, p)$.

Widerspruch.

Lemma 2 :

Sei e pseudo-stabil, $e > \alpha_\mu$, $\delta := c(e)$. Es sind äquivalent :

(1) e ist Nachfolger-pseudo-stabil

(2) $|e|^{\delta,1} < e$

Beweis:

(1 $\rightarrow$ 2):

e ist nicht L-pstab, also existiert ein $\gamma < e$ mit

$X := SH_1(e, p; L_\beta) = SH_1(\gamma, p; L_\beta)$. Sei π wieder der Kollaps, $f := \pi[h_p \upharpoonright \omega \times L_\gamma]$. f zeigt, dass $\sigma p^\delta(\delta) \leq \gamma$. Nach unserer Generalvereinbarung in Kap.2.1 können wir annehmen, dass $\sigma l f^\delta(\delta) = \kappa < \gamma$, also ist $\hat{\delta} \leq \gamma$. Aber dann ist insbesondere $|e|^{\delta,1} \leq \gamma < e$.

(2 $\rightarrow$ 1):

Es genügt zu zeigen, dass für e L-pstab $|e|^{\delta,1} = e$.

Sei dazu $f : \eta \leftrightarrow e$ β -rek mit $\eta < e$. Es genügt zu zeigen, dass $rg f < e$ beschränkt ist. Betrachte $\bar{f} := \pi^{-1}[f]$. $\bar{f}$ ist β -rek, $\text{dom } \bar{f} = \eta$ und $rg \bar{f} < e = \pi^{-1}(\rho^+)$ wobei $\rho < e < \rho^+$, ρ β -KardZ (der Fall $e = \rho$ ist trivial!). e ist L-pstab, wähle deshalb ein pstab e_0 mit $\eta < e_0 < e$ und $\bar{f}$ ist Σ_1 - $SH_1(e_0, p; L_\beta)$. Aber dann ist $rg \bar{f} < e_0$ und damit $rg f < \pi(e_0) = e_0 < e$. □

Korollar :

Für jede Nachfolger-pseudo-stabile $e > \alpha_\mu$ ist $c(e) = \tilde{e}$.

Beweis:

Nach Lemma 2.3.1 ist $c(e) \leq \tilde{e}$ und nach dem letzten Lemma ist $c(e) \geq \tilde{e}$. □

Lemma 3 :

Seien $e, \bar{e} > \alpha_\mu$ pseudo-stabil. Dann sind äquivalent :

(1) $X(e)$ und $X(\bar{e})$ sind streng isomorph

(2) $X(e) \cap \alpha_\mu^+ = X(\bar{e}) \cap \alpha_\mu^+$.

Beweis:

Betrachte zunächst den Mostowski-Kollaps $\pi: X(e) \longleftrightarrow L_Y$.

Sei $\eta := X(e) \cap \alpha_\mu^+$. Es ist $\text{slp}^Y(Y) = \alpha_\mu < \beta^*$ also $\alpha_\mu < Y < \alpha_\mu^+$.

Insbesondere ist $\eta = (\alpha_\mu^+)^{L_Y} < \alpha_\mu^+$. Sei

$e_0 := \min \{ z \mid \text{SH}_1(\alpha_\mu, (z, \pi(p)); L_Y) = L_Y \}$.

Behauptung: $e_0 = \pi(e)$

Offenbar ist $e_0 \triangleleft \pi(e)$, Annahme: $e_0 < \pi(e)$.

Sei $e_1 := \pi^{-1}(e_0) \in X(e)$, $e_1 < e$. Nach Definition von e_0 ist dann $e \sum_1$ definierbar ueber L_A mit Parametern aus $\alpha_\mu \cup \{e_1, p\}$.

Aber dann ist e nicht pstab, Widerspruch.

Insgesamt sind η und $\pi(e)$ durch Y eindeutig bestimmt;

analog fuer $\bar{\eta}$, $\pi(\bar{e})$, $\bar{Y}$.

(1 $\rightarrow$ 2):

$X(e)$ und $X(\bar{e})$ sind ϵ -isomorph, also ist $Y = \bar{Y}$. Somit

$\eta = (\alpha_\mu^+)^{L_Y} = (\alpha_\mu^+)^{L_{\bar{Y}}} = \bar{\eta}$.

(2 $\rightarrow$ 1):

Annahme: $Y < \bar{Y}$.

Dann ist $\eta = (\alpha_\mu^+)^{L_Y} < Y < (\alpha_\mu^+)^{L_{\bar{Y}}} = \bar{\eta}$, denn es ist

$\text{slp}^Y(Y) = \alpha_\mu$ und deswegen $L_{Y+1} \models |\eta| = \alpha_\mu$. Widerspruch.

Analog folgt $\bar{Y} \geq Y$ und somit $Y = \bar{Y}$, d.h. $f := \pi^{-1} \circ \pi$

ist ein ϵ -Isomorphismus $f: X(e) \longleftrightarrow X(\bar{e})$ und wir haben

zu zeigen, dass $f(e) = \bar{e}$. Aber $f(e) = \bar{e}$ gdw $\pi(e) = \pi(\bar{e})$

und das folgt aus $Y = \bar{Y}$ und der Bemerkung oben.



Beispiele:

Sei $\beta_0 := \aleph_\omega + \omega$, $\beta_1 := \beta_0 + \omega$.

Es ist $\beta_0^* = \beta_1^* = \aleph_\omega$, $\kappa_0 = \kappa_1 = \omega$ und $p(\beta_0) = p(\beta_1) = \aleph_\omega$.

Sei $m \geq 1$ fest, $\alpha_m = \aleph_m$,

$e_1 :=$ kleinste β_1 -pstab $> \aleph_m$.

Dann ist $\aleph_m < e_0 < e_1 < \aleph_{m+1}$, e_1 ist β_0 -pstab und $c_0(e_1) < \tilde{e}_1$.

c_0 ist hier im Sinne von β_0 zu verstehen:

$\pi: \text{SH}_1(e_1, \aleph_\omega; L_{\beta_0}) \longleftrightarrow L_{c_0(e_1)}$.

Behauptung: $T(e_0)$ bestimmt e_0 eindeutig (im Sinne von $\beta = \beta_0$).

Sei naemlich $\bar{e} < \aleph_\omega$ mit $T(e) = T(\bar{e})$. Dann ist $\bar{e}$ pstab und $\aleph_m < \bar{e} < \aleph_{m+1}$ weil $(\aleph_m < v < \aleph_{m+1}) \in T(e)$ und $(\exists z, i (h_p(i, z) \approx v \ \& \ z < v)) \notin T(e)$. $\aleph_m$ und $\aleph_{m+1}$ sind hier als Σ_1 Definitionen dieser Objekte mit einzigem Parameter $\aleph_\omega$ aufzufassen. Nach Lemma 2.1.2 und 2.2.3 folgt $e = X(e) \cap \aleph_{m+1} = X(\bar{e}) \cap \aleph_{m+1} = \bar{e}$.

Sei $C := PS_{\aleph_0} \cap \aleph_{m+1} \in L_{\aleph_{m+1}}$ und $X := SH_1(\aleph_m, (\aleph_{m+1}^C); L_{\aleph_{m+2}})$.

Sei $\pi: X \longleftrightarrow L_p$ der Kollaps und $e := X \cap \aleph_{m+1}$.

Es ist $\pi(C) = C \cap e$ und $C \cap e \in e$ unbeschraenkt, nach Bem.(2) folgt e pstab.

Es ist leicht zu sehen, dass auch fuer dieses e gilt $c(e) < \bar{e}$.

Bemerkung:

Das obige Argument zeigt auch, dass in der Tat $T(x)$ keine β -rek Funktion ist. Denn es ist fuer alle $e < \beta^*$ $e \in PS_\beta$ gdw $(\exists z, i (h_p(i, z) \approx v \ \& \ z < v)) \notin T(e)$. Aber PS_β ist nicht β -ra nach Bem.(4).

SPUREN

Wir verwenden pseudo-stabile Ordinalzahlen um eine uniforme Darstellung von Elementen von $\beta^* - H$ zu erhalten. Pseudo-stabile Ordinalzahlen in L_β entsprechen den stabilen in L : nach dem folgenden Lemma hat jedes $x \in L_\beta$ eine Σ_1 Definition ueber L_β mit Parametern aus $PS_\beta \cup \{p(\beta)\}$.

Definition :

Sei $x < \beta^*$ und $\vec{x} = (x_0, \dots, x_N)$ wobei $x_i \leq x$, $0 \leq i \leq N$.

$\vec{x}$ heisst Spur von x falls

- fuer ein $i < \omega$ gilt $h_p(i, x) \approx x$
- x_i ist pstab fuer alle $i \leq N$.

Lemma 4 :

Fuer jedes $x < \beta^*$ existiert eine Spur $\vec{x}$ von x .

Beweis:

Beweis per Induktion nach x .

Falls x pstab ist, ist (x_0) , $x_0 := x$ eine Spur von x .

Falls x nicht pstab ist existieren $y_1, \dots, y_k < x$ mit $h_p(i, (y_1, \dots, y_k)) \approx x$ fuer ein $i < \omega$. Nach Induktions-Vor. existieren Spuren fuer die y_j ; es ist leicht, diese Spuren zu einer Spur von x zusammenzusetzen. □

Fixiere jetzt ein $x < \beta^*$. Definiere induktiv eine absteigende Folge von Ordinalzahlen wie folgt :

$$\xi_n := \min(\xi \mid \exists x. N \geq n, x_i, i = n+1, \dots, N \text{ so, dass} \\ (\xi_0, \dots, \xi_{n-1}, \xi, x_{n+1}, \dots, x_N) \text{ ist Spur von } x \text{ und} \\ \forall i, n < i \leq N : x_i < \xi.)$$

Wir erhalten nach endlich vielen Schritten eine Spur

$(\xi_0, \dots, \xi_k)$ von x mit $x \geq \xi_0 > \xi_1 > \dots > \xi_k$. Nach Definition gilt fuer jede andere Spur $(x_0, \dots, x_m)$ von $x : x_0 \geq \xi_0$, $x_0 = \xi_0 \rightarrow x_1 \geq \xi_1$ usw.

$(\xi_0, \dots, \xi_k)$ heisst minimale Spur von x , Schreibweise $mS(x)$.

Sei ausserdem noch

$$st(x) := \min(\sigma < x \mid \exists i < \omega (L_{q(\sigma)} \models h_p(i, mS(x)) \approx x)) .$$

Beachte, dass weder mS noch st β -rek Funktionen sind. Denn es gilt $x \in PS_\beta$ gdw $mS(x) = (x)$ und PS_β ist nicht β -ra nach Bem.(4). st ist nicht β -rek wegen

$$mS(x) = x \text{ gdw } L_{q(st(x))} \models (mS(x) = x) ,$$

hierbei ist wie stets $(mS(x) = x)$ als ZF-Formel aufzufassen.

Im Sinne unserer Heuristik ist $st(x)$ ein wesentlicher Schritt bei der "Berechnung" von $\sigma(x)$ wie aus dem folgenden Lemma ersichtlich ist.

Beachte auch, dass fuer $x < \beta^* : x \in H$ gdw $mS(x) \in L_{\alpha_\mu}$.

Lemma 5 :

Sei $x < \beta^*$, $st(x) \leq \sigma < \kappa$, $\bar{x} := mS(x)$, $p \in X \prec_1 L_q(\sigma)$.

Dann ist $x \in X$ gdw $\bar{x} \in X$.

Beweis:

$\bar{x} \in X \rightarrow x \in X$ folgt sofort aus den Definitionen. Sei also

$x \in X$; wir betrachten der Einfachheit halber nur den Fall

$\bar{x} = (y, z)$, $x > y > z$. Sei $i < \omega$ mit $h_p(i, \bar{x}) \approx x$ und

$\bar{y} := \min(u \in X \mid X \models \exists w < u (h_p(i, (u, w)) \approx x))$.

Ein solches $\bar{y}$ existiert, weil $x, p \in X \prec_1 L_q(\sigma)$.

Annahme: $\bar{y} < y$.

Dann wurde eine Spur $(\bar{y}, \bar{z})$ von x existieren mit $\bar{y} < y$ im Widerspruch zur Definition von $mS(x)$.

Annahme: $\bar{y} > y$.

Dann gilt $L_q(\sigma) \models \exists u < \bar{y}, w < u (h_p(i, (u, w)) \approx x)$.

Aber $x, \bar{y}, p \in X \prec_1 L_q(\sigma)$, also ist auch X Modell dieser Formel. Widerspruch zur Definition von $\bar{y}$.

Also ist $\bar{y} = y$ und ein aehnliches Argument zeigt $\bar{z} \in X$, insgesamt $mS(x) \in X$.



Lemma 6 :

Sei $x \in \beta^* - H$ und $mS(x) = (x_0, \dots, x_N)$.

Falls eines der x_i unterscheidbar ist, ist auch x unterscheidbar.

Beweis:

Beachte, dass $x_0 \notin H$ ist. Denn sonst waere wegen

$H = SH_1(\alpha_\mu, p; L_\beta)$ $mS(x_0) \in L_{\alpha_\mu}$; aber x_0 ist pstab, also $x_0 < \alpha_\mu$ und damit $x_1 \leq x_0 < \alpha_\mu$. Aber dann waere $x \in H$.

Sei deshalb oBdA $e := x_0$ unschb auf Stufe σ_0 .

Sei $\sigma := \max(\sigma_0, st(x))$.

Behauptung: x ist unschb auf Stufe σ .

Sei fuer einen Widerspruch $\bar{x} \in H$ mit $T^\sigma(x) = T^\sigma(\bar{x})$. Nach

Lemma 2.1.2 ist $X^\sigma(x) \cong X^\sigma(\bar{x})$, sei $f : X^\sigma(x) \longleftrightarrow X^\sigma(\bar{x})$ der entsprechende Isomorphismus.

Nach Lemma 5 ist $e \in X^\sigma(x)$, sei deshalb $\bar{e} := f(e)$.
 $f \upharpoonright X^{\sigma_0}(e)$ zeigt, dass $X^{\sigma_0}(e) \cong X^{\sigma_0}(\bar{e})$. Das ist trivial fuer
 $\sigma_0 = \sigma$ und folgt aus $\sigma_0, q(\sigma_0) \in X^\sigma(e)$ falls $\sigma_0 < \sigma$.
 Denn mit den Bezeichnungen aus Lemma 2.1.2 ist dann fuer
 $a \in X^{\sigma_0}(e)$

$$X^\sigma(e) \models \left(L_{q(\sigma_0)} \models h_{(p,e)}(1, e_a) \approx a \right) \quad \text{also}$$

$$X^\sigma(\bar{e}) \models \left(L_{q(\sigma_0)} \models h_{(p,\bar{e})}(1, e_a) \approx f(a) \right).$$

Nach Lemma 2.1.2 ist dann auch $T^{\sigma_0}(e) = T^{\sigma_0}(\bar{e})$. Aber $\bar{e} \in H$.
 Widerspruch. □

Bemerkung:

Der letzte Beweis zeigt insbesondere, dass aus x unschb
 auf Stufe $\sigma < \kappa$ und $\sigma < \tau$ folgt : x unschb auf Stufe τ .

(2.3) BEWEIS VON SATZ 1

Nach Lemma 2.1.1, 2.1.3 und 2.2.6 genuegt es zu zeigen, dass
 fuer jedes $x \notin \beta^* - H$ mit $mS(x) = (x_1, \dots, x_k)$ schon eines
 der x_i unterscheidbar ist. Nach Definition sind die x_i pseudo-
 stabil und wegen $x \in H$ ist zumindest $x_0 > \alpha_\mu$. Es genuegt
 also zu zeigen, dass jede pseudo-stabile Ordinalzahl groesser
 α_μ unterscheidbar ist.

Lemma 1 :

Sei $e > \alpha_\mu$ Nachfolger-pseudo-stabil.

Dann ist e unterscheidbar auf Stufe 0.

Beweis:

Sei ρ eine β -KardZ mit $\rho < e < \rho^+$, $\rho \geq \alpha_\mu$. Sei $y := c(e)$,
 $X := SH_1(e, \rho; L_\beta)$ und $\pi: X \longleftrightarrow L_y$ der Kollaps.

Sei ferner $Y := X^0(e)$, also $p \in Y \prec_1 L_{q(0)}$.

Es ist also $e = \pi(\rho^+)$ und nach dem Korollar zu Lemma 2.2.2 $\gamma = \bar{c}(e) = \bar{e}$. Insbesondere ist damit $\gamma \in Y$.

Wie im Beweis von Lemma 2.2.3 zeigt man, dass

$\pi(p) = \min\{z \mid SH_1(e, z; L_Y) = L_Y\}$, damit ist auch $\pi(p) \in Y$, sei $\pi(p) =: \bar{p}$.

Behauptung: $H \cap \rho^+ \subset Y \cap e$.

Sei dazu $a \in H \cap \rho^+$, d.h. $h_p(1, e_a) \approx a$ fuer ein $i < \omega, e_a < \alpha_\mu$.

Wegen $X <_1 L_\beta$ gilt

$X \models \exists x (h_p(1, e_a) \approx x \ \& \ x < \rho^+)$.

Aber $X \cap L_{\rho^+} = L_e$ nach Lemma 2.2.1, also existiert ein $\bar{a} < e$ mit

$X \models h_p(1, e_a) \approx \bar{a}$ und damit $L_\beta \models h_p(1, e_a) \approx \bar{a}$.

h_p ist eine Funktion, es folgt $a = \bar{a} < e$ und damit $H \cap \rho^+ \subset e$.

$X \cap L_{\rho^+} = L_e$ ist der transitive Teil von X , also ist $\pi \upharpoonright L_e = \text{id}$.

Es folgt wegen $L_Y \cong X$

$L_Y \models h_p(1, e_a) \approx a$ wegen $e, e_a, p, \in Y <_1 L_q(0)$

$Y \models \exists x (L_Y \models h_p(1, e_a) \approx x \ \& \ x < e)$ sei $a' \in Y \cap e$ mit

$Y \models (L_Y \models h_p(1, e_a) \approx a')$ es folgt

$L_Y \models h_p(1, e_a) \approx a'$ und damit

$X \models h_p(1, e_a) \approx a'$.

Aber das bedeutet, dass $h_p(1, e_a) \approx a'$, also $a = a' \in Y$.

Annahme: e ist nicht unschb auf Stufe 0.

Dann existiert ein $\bar{e} \in H$ mit $T^0(e) = T^0(\bar{e})$ und nach Lemma 2.1.2

$Y \cong X^0(\bar{e}) =: \bar{Y}$. Sei $e \in H^\tau$ fuer $\tau < \kappa$ und sei e' die kleinste β, τ -pstab groesser als ρ . Ganz analog zur letzten Beh. zeigt man $H^\tau \cap \rho^+ \subset e'$. Also ist $\bar{Y} \cap \bar{e} \subset H^\tau \cap \bar{e} \subset e'$.

Betrachte die Kollapse $\pi: Y \longleftrightarrow L_\beta$ und $\bar{\pi}: \bar{Y} \longleftrightarrow L_{\bar{\beta}}$.

Wegen $Y \cong \bar{Y}$ ist $\sigma = \bar{\sigma}$ und $\pi(e) = \bar{\pi}(\bar{e})$. Aber

$\bar{\pi}(\bar{e}) = \text{otp}(\bar{Y} \cap \bar{e}) \leq \text{otp}(H^\tau \cap e')$

$\pi(e) = \text{otp}(Y \cap e) \geq \text{otp}(H \cap \rho^+)$

und es genuegt fuer einen Widerspruch zu zeigen, dass $e' \in H$.

Beachte dazu, dass wegen $\bar{e} \in H$ und $\rho < \bar{e} < \rho^+$ auch $\rho, \rho^+ \in H$.

Betrachte die folgende Formel

$$\Phi(z) := \rho < z < \rho^+ \ \& \ L_q(\tau) \models (z \text{ pstab} \ \& \ \forall u, \rho < u < z : \\ u \text{ nicht pstab} .)$$

Es ist leicht zu sehen, dass $\Phi \sum_1$ Formel mit Parametern aus $\alpha_\mu \cup \{\rho\}$ ist und es gilt $\Phi(e') \ \& \ (\Phi(z) \rightarrow z = e')$. Ferner $SH_1(\alpha_\mu, \rho; L_q(\tau+1)) \models \exists z \Phi(z)$.

Also ist $e' \in H^{\tau+1} \subset H$ und wir sind fertig. □

Der Beweis des letzten Lemmas verwendet die Voraussetzung e N-pstab nur um sicherzustellen, dass $c(e) = \tilde{e} \in X^0(e)$. $c(e) = \tilde{e}$ gilt aber auch fuer viele L-pstab, z.B. fuer die erste L-pstab groesser als ρ . Fuer die Beispiele in Kap.2.2 ist zwar $c(e) < \tilde{e}$ aber trotzdem $c(e) \in X(e)$. All diese pstab Ordinalzahlen sind unterscheidbar auf Stufe 0. Wir wissen nicht, ob im allgemeinen stets $c(e) \in X(e)$ und zeigen deshalb in Lemma 2 dass jedes pstab e unterscheidbar ist ohne die Stufe explizit anzugeben wie in Lemma 1.

Lemma 2 :

Sei $e > \alpha_\mu$ pstab. Dann ist e unterscheidbar.

Beweis:

Wir unterscheiden zwei Faelle :

Fall 1 : $\alpha_\mu < e < \alpha_\mu^+$.

Es ist leicht zu sehen, dass dann schon $e \in X^0(e)$.

Annahme: fuer ein $\bar{e} \in H$ ist $T^0(e) \cong T^0(\bar{e})$.

Dann ist wieder $X^0(e) \cong X^0(\bar{e})$ und $\bar{e}$ ist offenbar $\beta, 0$ -pstab.

Nach Lemma 2.2.3 ist $\eta := X^0(e) \cap \alpha_\mu^+ = X^0(\bar{e}) \cap \alpha_\mu^+ =: \bar{\eta}$.

Sei $e_0 :=$ kleinste pstab groesser als α_μ .

Nach dem Beweis von Lemma 1 ist $\bar{\eta} \leq e_0$ und trivialerweise $e_0 \leq e$, insgesamt $\bar{\eta} \leq e_0 \leq e < \eta$. Widerspruch.

Fall 2 : $e > \alpha_\mu^+$.

Sei $\eta := \bigcap \{ X(e) \mid e \text{ pstab} \ \& \ e > \alpha_\mu^+ \} \cap \alpha_\mu^+$.

Fixiere ein e pstab, $e > \alpha_\mu^+$ mit $X(e) \cap \alpha_\mu^+ = \eta$. Sei

$X := SH_1(\alpha_\mu, (p, e); L_\beta) = X(e) \prec_1 L_\beta$ und

$Y := SH_1(\eta, p; L_\beta) \prec_1 L_\beta$.

Wie immer seien $\pi : X \longleftrightarrow L_\delta$ und $\bar{\pi} : Y \longleftrightarrow L_\gamma$ die Kollapse.

Behauptung 1 : $\eta < \alpha_\mu^+$ ist pstab.

Zunaechst ist $\eta < \alpha_\mu^+$ weil $\alpha_\mu^+ < \beta^*$ als Nachfolger- β -KardZ

Σ_1 regulaer ist (siehe Fl). Also ist $\eta \in X$.

Andererseits ist $[\eta, \alpha_\mu^+ \cap X = \emptyset$, d.h. $\eta = \pi(\alpha_\mu^+)$ und die Beh. folgt aus Lemma 2.2.1.

Behauptung 2 : $\sigma \text{clf}^\delta(\eta) = \kappa$.

Wir verwenden hier unsere Generalvoraussetzung, dass μ gross genug ist.

Betrachte die Funktion $f : \kappa \longrightarrow \eta$, $f(\sigma) := X^\sigma(e) \cap \alpha_\mu^+$.

Beachte, dass $f(\sigma) < \alpha_\mu^+$ Ordinalzahl ist. f ist β -rek,

genauer Σ_1 - $\alpha_\mu \cup \{e, p\}$. Ferner ist $f \subset \kappa \times \eta \subset X$, also $f \Sigma_1$ - X .

$L_\eta \subset X$ ist transitiv und damit $\pi[f] = f \Sigma_1$ - L_δ . Es

bleibt zu zeigen, dass $\text{rg } f \subset \eta$ unbeschraenkt ist. Das folgt

aus $X(e) = \bigcup \{X^\sigma(e) \mid \sigma < \kappa\}$, also ist $\sigma \text{clf}^\delta(\eta) \leq \kappa$.

Sei umgekehrt $g : \bar{\kappa} \longrightarrow \eta$ δ -rek, $\text{rg } g \subset \eta$ unbeschraenkt.

Definiere $h : \bar{\kappa} \longrightarrow \kappa$ per $h(i) := \min(\sigma < \kappa \mid g(i) < f(\sigma))$.

h ist β -finit und $\text{rg } h \subset \kappa$ unbeschraenkt, also $\bar{\kappa} \geq \kappa$

und damit $\sigma \text{clf}^\delta(\eta) = \kappa$.

Behauptung 3 : $\delta = \tilde{\eta}$

η ist δ -KardZ und damit $\tilde{\eta} \geq \delta$. Es genuegt zu zeigen, dass

$\sigma \text{lp}^\delta(\eta) = \alpha_\mu < \eta$. Sei f wie in Beh.2.

Fuer $v \in [\alpha_\mu, \eta[$ sei $c_v : \alpha_\mu \longleftrightarrow v$ δ -finit.

Setze $g : \kappa \times \alpha_\mu \longrightarrow \eta$, $g(\sigma, i) := c_{f(\sigma)}(i)$. g ist wie $f \Sigma_1$ - L_δ

und offenbar surjektiv. Mit $|\kappa \times \alpha_\mu|^\delta = \alpha_\mu$ folgt die Beh.

Behauptung 4 : $\delta > \gamma$

Es ist $\eta \subset X$, $p \in X$ und damit $Y \subset X$, also $\delta \geq \gamma$.

Annahme: $\delta = \gamma$.

Betrachte $f := \bar{\pi}^{-1} \circ \pi$, $f : X \longleftrightarrow Y$.

f ist ein ϵ -Isomorphismus, $f|_{\alpha_\mu} = \text{id}$. Wie im Beweis von Lemma 2.2.3 zeigt man, dass $f(p) = p$. Sei $\bar{e} := f(e)$. $\bar{e}$ ist pstab weil e pstab ist. Ferner ist $\bar{e} < \alpha_\mu^+$. Aber $\bar{e} \in Y$ und nach Definition von Y ist $mS(\bar{e}) \in L_{\alpha_\mu}$, d.h. $\bar{e}$ ist nicht pstab. Widerspruch.

Nach Beh.1,3,4 ist also η pstab und $\delta = \tilde{\eta} > \gamma = c(\eta)$. Nach Lemma 2.2.2 ist η nicht N-pestab, damit ist insbesondere $\eta > e_0 :=$ kleinste pstab groesser α_μ .

Sei jetzt e' pstab, $e' > \alpha_\mu^+$. Nach Definition von η ist $e_0 < \eta \leq X(e') \cap \alpha_\mu^+$. Man zeigt wie in Beh.2 dass fuer ein $\sigma < \kappa : e_0 < X^\sigma(e') \cap \alpha_\mu^+$. Dann ist $e_0 \in X^\sigma(e')$ und e_0 ist unschb nach Lemma 1. Wie im Beweis von Lemma 2.2.6 folgt, dass auch e' unschb ist.



Bemerkung :

Die "Berechnung" der Funktion $\sigma(x)$ aus unserer heuristischen Betrachtung verlauft also wie folgt :

- $\sigma_0 := st(x)$
Es ist $mS(x) =: (x_0, \dots, x_N) \in X^{\sigma_0}(x)$.
- $\sigma_1 := \min(\sigma \geq \sigma_0 \mid X^\sigma(x_0) \cap \alpha_\mu^+ > e_0)$
 e_0 ist unschb auf Stufe 0, also ist x_0 und damit auch x unschb auf Stufe σ_1 .

Beweis von Satz 1 :

Sei $X \subset \beta^*$ β -ra und duenn. Nach Lemma 2.1.1 genuegt es zu zeigen, dass fuer ein ausreichend grosses $\mu < \sigma \text{ lcf}^\beta(\beta^*)$

$H := SH_1(\alpha_\mu, p; L_\beta)$ β -rek ist wegen $X \subset H$ und H duenn.

Dafuer reicht nach Lemma 2.1.3 aus zu zeigen, dass jedes $x \in \beta^*$ - H unterscheidbar ist und nach Lemma 2.2.6 dass jede pseudo-stabile Ordinalzahl groesser α_μ unterscheidbar ist. Aus dem letzten Lemma folgt die Behauptung.



(2.4) DER ORDNUNGSTYP EINER DUENNEN MENGE

In Lemma 0.2.2 wurde gezeigt, dass fuer $X \subset \hat{\beta}$ β -ra gilt:
 X ist duenn gdw $\text{otp } X < \beta^*$.

Der Ordnungstyp von X versteht sich dabei als Ordnungstyp einer Menge von Ordinalzahlen, also bezueglich ϵ . Falls $X \subset L_\beta$ beliebig definiert die kanonische Wohlordnung $<_\beta$ von L_β einen Ordnungstyp von X . Aus der Feinstrukturtheorie ist bekannt, dass $<_\beta \Delta_1 - L_\beta$ ist und dass fuer alle $x \in L_\beta$ $\{z \in L_\beta \mid z <_\beta x\}$ β -finit ist. Damit ist leicht zu sehen, dass sich der Beweis von Lemma 0.2.2 verallgemeinert auf beliebige Teilmengen X von L mit Ausnahme eines einzigen Falles: wenn $\beta^* = \kappa < \beta$ ist wesentlich, dass $\beta^* = \kappa \Sigma_1^\beta$ regulaer und $X \subset \kappa = \hat{\beta}$ ist. Wir beweisen deshalb folgendes

Lemma:

Sei $\beta^* = \kappa < \beta$ und X β -ra, $X \subset L_\beta$ beliebig.
 Aus $\text{otp } X < \beta^*$ folgt X ist duenn.

Beweis:

Betrachte zunaechst den Fall β^* Limes von β -KardZ.

Sei $f: \kappa \longleftrightarrow X$ eine Aufzaehlung, wir haben zu zeigen, dass $\beta^* \leq \text{otp } X$ ist. Sei dazu $\theta < \beta^*$, waehle eine β -KardZ $\bar{\theta}$ mit $\theta < \bar{\theta} < \beta^*$. Dann ist $X_\theta := f[\bar{\theta}]$ β -finit per Σ -Koll. und es ist $\text{otp } X \geq \text{otp } X_\theta \geq \bar{\theta} > \theta$ weil $\bar{\theta}$ β -KardZ ist.

Fuer den Fall $\beta^* = \rho^+$ kann man statt $\bar{\theta}$ eine β -pseudo-stabile Ordinalzahl e verwenden:

Sei fuer einen Widerspruch β minmal mit: es existiert $X \subset L_\beta$ β -ra, $\text{otp } X < \beta^* = \kappa < \beta$ aber $|X|^{\beta,1} = \beta^*$.

Sei wieder $f: \kappa \longleftrightarrow X$ eine Aufzaehlung, $f \Sigma_1^\beta - \{a, p\}$ wo $p := p(\beta)$ und $a < \beta^*$.

Nach Kap.2.2 existiert e L - β -pstab mit a , $\text{otp } X < e < \beta^*$.

Sei $Z := SH_1(e, p; L_\beta) \subset_1 L_\beta$ und $\pi: Z \longleftrightarrow L_\beta$ der Kollaps.

Sei ferner e gross genug, dass auch $q: \kappa \longrightarrow \beta \Sigma_1^\beta - e \cup \{p\}$ ist.

Sei noch $\bar{p} := \pi(p)$.

Behauptung 1 : $\sigma p^\delta(\delta) = e$.

Nach Definition von Z ist jedenfalls $\sigma p^\delta(\delta) \leq \pi e = e$.

Annahme: $\lambda := \sigma p^\delta(\delta) < e$.

Dann existiert eine partielle δ -rek Funktion $\bar{g} : \lambda \rightarrow e$ mit $\bar{g}$ surjektiv. e ist nach Vor. L -pstab, sei deshalb e_0 pstab mit $\lambda < e_0 < e$ und $\bar{g}$ ist Σ_1 -H wo $H := SH_1(e_0, \bar{p}; L_\delta)$. Es ist $\text{dom } \bar{g} \subset e_0 \subset H \prec_1 L_\delta$ und damit $\text{rg } \bar{g} \subset H \cap e = e_0 < e$. Widerspruch.

Behauptung 2 : $\sigma lcf^\delta(\delta) = e$.

Sei $\lambda := \sigma lcf^\delta(\delta)$. Nach Wahl von e ist $q|_e \in \Sigma_1$ -Z, also $\bar{q} := \pi[q|_e] \in \Sigma_1$ - L_δ . Ferner ist $\text{dom } \bar{q} = \pi[\text{dom } q|_e] = e$. $\text{rg } q|_e$ ist unbeschränkt in $Z \cap \beta$ weil $Z \prec_1 L_\beta$, also ist $\text{rg } \bar{q} \subset \delta$ unbeschränkt und damit $\lambda \leq e$.

Annahme: $\lambda < e$.

Sei dementsprechend $\bar{q} : \lambda \rightarrow \delta$ δ -rek mit $\text{rg } \bar{q} \subset \delta$ unbeschränkt. Setze $g := \pi^{-1}[\bar{q}]$, also $\text{dom } g = \lambda$ und g β -rek. Wegen $\lambda < \sigma lcf \beta$ gilt

$L_\beta \models (\exists y (L_y \models \forall i < \lambda \exists x (g(i) \approx x)))$	weil $Z \prec_1 L_\beta$
$Z \models (\dots)$	sei $y \in Z \cap \beta$ mit
$Z \models (L_y \models \forall i < \lambda \exists x (g(i) \approx x))$	es folgt mit $\bar{y} := \pi(y)$
$L_\delta \models (L_{\bar{y}} \models \forall i < \lambda \exists x (\bar{q}(i) \approx x))$	

Also ist $\text{rg } \bar{q} \subset \bar{y} < \delta$. Widerspruch.

Sei jetzt $X_0 := f[e] \subset X$, $X_0 = X \cap Z$. $X_1 := \pi[X_0]$ ist dann Σ_1 - L_δ und $|X_1|^{\delta,1} = |e|^{\delta,1}$ wie $\pi[f|_e]$ zeigt.

Nach Lemma 2.2.2 ist wegen e L -pstab $|e|^{\delta,1} = e$ und damit $|X_1|^{\delta,1} = e = \sigma p^\delta(\delta) = \sigma lcf^\delta(\delta)$ nach Beh.1&2. Aber $\delta < \beta$.

Nach unserer Wahl von β ist deshalb $\text{otp } X_1 \geq e$ ($\text{otp } X_1$ versteht sich hier bezueglich $<_\delta$). π ist vertraeglich mit der kanonischen WO von L , deshalb ist

$e \leq \text{otp } X_1 = \text{otp } X_0 \leq \text{otp } X < e$. Widerspruch.



KAPITEL 3

DUENNE Σ_n MENGEN

Sei $X \subset L_\beta \Sigma_n - L_\beta$, $n \geq 1$.

Wir nennen X duenn falls $|X|^{\beta, n} < \sigma n p \beta$.

Es ist jeweils aus dem Kontext ersichtlich, welches n gemeint ist. Nach den Resultaten aus Kap.1 und Kap.2 gilt im Spezialfall $n=1$ der folgende

Satz :

Sei $X \subset L_\beta \Sigma_n - L_\beta$ und duenn. Dann ist $X \Delta_n - L_\beta$.

Wir skizzieren im Folgenden, wie sich die Beweise aus Kap.1 und Kap.2 auf den Fall $n > 1$ verallgemeinern lassen.

Sei dazu β und $n \geq 2$ fest.

$\bar{p} := \sigma n p \beta$, $\rho := \sigma(n-1)p\beta$, $\bar{\kappa} := \sigma n c f^\beta(\rho)$ und $\tilde{\beta} := \max(\bar{\kappa}, \bar{p})$.

Nach Jensen sind die $\Sigma_n - L_\beta$ Mengen $Y \subset \rho$ gerade die α -ra Mengen, wobei $\alpha := \langle L_\rho, A \rangle$ fuer einen Σ_{n-1} Master Kode A .

Wir zeigen deshalb

- X ist oBdA Teilmenge von $\tilde{\beta} \leq \rho$
- die Argumente von Kap.1, Kap.2 uebertragen sich auf α .

Denn dann ist X α -ra und duenn im Sinne von α , d.h.

$|X|^{\alpha, 1} < \alpha^*$, und damit α -rek, also $\Delta_n - L_\beta$.

Wir verwenden die Notation aus D1, siehe dort besonders Kapitel 7.

Definition : Standard-Parameter, Standard-Master-Kodes

Sei $p^0(\beta) := A^0(\beta) := \emptyset$.

$p^{k+1}(\beta) := p(\langle L_{\sigma k p \beta}, A^k(\beta) \rangle)$

$A^{k+1}(\beta) := \{ \langle i, x \rangle \mid i < \omega, x \in L_{\sigma(k+1)p\beta}$

$\langle L_{\sigma k p \beta}, A^k(\beta) \rangle \models \Phi_1(x, p^{k+1}(\beta)) \}$.

Hierbei ist $\langle \Phi_1 \mid i < \omega \rangle$ eine rekursive Aufzaehlung der Σ_1 Fml.

Wir schreiben p_i statt $p^i(\beta)$.

Der wesentliche Grund fuer die Verwendung dieser speziellen Parameter und Master Codes liegt in ihrer Vertraeglichkeit mit Mostowski-Kollapsen, siehe das Extension Lemma (Lemma 7.20 in D1) und Lemma 3.2 .

Sei fuer den Rest dieses Kapitels $\alpha := \langle L_p, A^{n-1}(\beta) \rangle$.

Sei $\bar{q} : \bar{\kappa} \rightarrow \rho$ α -rek mit $\text{rg } \bar{q} \subset \rho$ kofinal. Man kann wieder oBdA annehmen, dass $\bar{q}$ streng monoton und stetig ist.

Sei ferner $\forall \sigma < \bar{\kappa}, \gamma < \bar{q}(\sigma) \ (A^{n-1}(\beta) \cap \gamma \in L_{\bar{q}(\sigma)})$.

Wir schreiben α_σ fuer $\langle L_{\bar{q}(\sigma)}, A^{n-1} \cap L_{\bar{q}(\sigma)} \rangle$.

Es lassen sich zwei Faelle unterscheiden :

Fall 1 : $\bar{p} \leq \bar{\kappa}$

Das entspricht der Situation β w.adm., $n=1$ und die Behauptung folgt leicht aus Lemma 3.1 .

Fall 2 : $\bar{p} > \bar{\kappa}$

Das entspricht der Situation β s.inad., $n=1$. Falls $\bar{p}$

Σ_n^β regulaer ist, ist $\chi < \bar{p}$ sogar ρ -finit. Im Fall $\bar{p} \Sigma_n^\beta$ irregulaer genuegt es wieder zu zeigen, dass gewisse

Σ_1 Skolem Huellen in α α -rek sind. Wir betrachten dazu

α -pseudo-stabile OrdZ und zeigen, dass sie sich im wesentlichen genauso verhalten, wie β -pseudo-stabile.

Lemma 1 :

$$|L_p|^\beta, n = \tilde{\beta} .$$

Beweis:

Offenbar ist $|L_p|^\beta, n = |\rho|^\beta, n =: \delta$. Sei $P : \delta \leftrightarrow \rho$ α -rek.

Annahme: $\delta < \tilde{\beta}$.

Wegen $\bar{p} \leq \delta$ folgt $\tilde{\beta} = \bar{\kappa} > \delta$. Per Σ Kollektion ist dann

P ρ -finit. Widerspruch.

Also genuegt zu zeigen, dass $\delta \leq \tilde{\beta}$.

Sei deshalb oBdA $\tilde{\beta} < \rho$. Sei $f : \rho \rightarrow \tilde{\rho}$ $\mathcal{A}$ -rek, injektiv.

Betrachte die folgende Aufzaehlung von f :

$f^\sigma := \{(i, j) \mid \mathcal{A}_\sigma \models f(i) \approx j\}$, $\sigma < \bar{\kappa}$.

Sei $\text{st}(i) := \min\{\sigma < \bar{\kappa} \mid \mathcal{A}_\sigma \models f(i) \downarrow\}$.

Setze $F : \rho \rightarrow \tilde{\beta}$, $F(i) := \langle \text{st}(i), f(i) \rangle$.

F ist $\mathcal{A}$ -rek, injektiv und $A := \text{rg } F$ ist ebenfalls $\mathcal{A}$ -rek.

Ferner ist $|A|^{\beta, n} = \delta$.

1. Fall $\tilde{\rho} \leq \bar{\kappa}$

Falls A β -finit ist, ist $|A|^{\beta, n} \leq |A|^\beta \leq \bar{\kappa}$ und wir sind fertig. Falls A nicht β -finit ist verwende die folgende

Behauptung : Sei $D \subset \bar{\kappa}$ $\mathcal{A}$ -rek, $D \not\subseteq L_\beta$.

Dann ist $|D|^{\beta, n} = \bar{\kappa}$.

Sei dazu $g : \bar{\kappa} \rightarrow D$, $g(\sigma) := \min\{x \in D \mid x \Vdash \sigma\}$.

g ist p - $\mathcal{A}$ -rek und a priori $\text{dom } g =: \gamma \leq \bar{\kappa}$. Wegen $D \not\subseteq L_\beta$

und Δ_n Separation unterhalb von $\tilde{\beta}$ folgt $\gamma = \bar{\kappa}$. g ist

streng monoton und damit $\text{rg } g \subset \bar{\kappa}$ unbeschraenkt. Also ist

$\text{rg } g = D$ und die Beh. folgt.

2. Fall $\tilde{\rho} > \bar{\kappa}$

Wir koennen oBdA annehmen, dass $|f^0|^\beta = \tilde{\rho}$. Sei entsprechend

$h^\sigma : \text{rg } f^\sigma \longleftrightarrow \tilde{\rho}$ β -finit. Wegen Σ_n Separation unterhalb

von $\tilde{\rho}$ ist $a := \{\sigma \mid \exists j \langle \sigma, j \rangle \in A\}$ β -finit. Aber $a \subset \bar{\kappa}$ ist

unbeschraenkt, also $|a|^\beta = \bar{\kappa}$.

Sei $h : a \longleftrightarrow \bar{\kappa}$ β -finit. Definiere $H : \rho \rightarrow \tilde{\rho}$ per

$H(i) := \langle h(\sigma), h^\sigma(j) \rangle$ wobei $\sigma := \text{st}(i)$ und $j := f(i)$.

H ist $\mathcal{A}$ -rek und offenbar bijektiv. □

Nach Lemma 1 existiert also eine Σ_{n-L_β} Funktion $P : L_\beta \longleftrightarrow \tilde{\beta}$.

X ist Δ_{n-L_β} gdw $P[X] \subset \tilde{\beta}$ ist Δ_{n-L_β} .

Man kann deswegen oBdA annehmen, dass $X \subset \tilde{\beta}$.

Beweis des Satzes im Fall 1 :

X ist duenn, sei also $f : \delta \longleftrightarrow X$ $\mathcal{A}$ -rek Aufzaehlung,
 $\delta := |X|^{\beta, n} < \bar{p} \leq \bar{\kappa}$.

Wegen Σ Kollektion ist f schon Σ_1 - $\mathcal{A}_\sigma$ fuer ein $\sigma < \bar{\kappa}$.
 Also ist f und damit auch X ρ -finit und insbesondere Δ_n - L_β .

□

$\mathcal{A}$ -PSEUDO-STABILITAET

In Analogie zu Kap.2.2 heisst $e < \bar{p}$ $\mathcal{A}$ -pseudo-stabil falls
 $e \notin SH_1(e, p_n; \mathcal{A})$.

Das Extension Lemma besagt, dass sich Σ_1 Substrukturen von
 $\mathcal{A}$ zu Σ_n Substrukturen von L_β erweitern lassen. Als
 Spezialfall erhalten wir das folgende

Lemma 2 :

Sei $\gamma < \bar{p}$, $X := SH_1(\gamma, p_n; \mathcal{A}) <_1 \mathcal{A}$.

Dann existiert ein $Y \supset X$ mit

- $p_1, \dots, p_n \in Y <_n L_\beta$
- $X = Y \cap L_\rho$.

Sei jetzt $e < \bar{p}$ $\mathcal{A}$ -pstab, $X := SH_1(e, p_n; \mathcal{A})$ und Y die kleinste
 Σ_n Substruktur wie in Lemma 2. $\pi : Y \longleftrightarrow L_\gamma$ sei der Kollaps.
 Sei $c(e) := \gamma$. Sei $\mu \beta$ -KardZ mit $\mu < e < \mu^+$. Dann ist wieder
 $e = \pi(\mu^+)$ und damit $c(e) \neq \tilde{e}$.

Fuer Nachfolger- $\mathcal{A}$ -pstab ist wieder $c(e) = \tilde{e}$. Denn sei
 $e_0 < e$ mit $X = SH_1(e_0, p_n; \mathcal{A})$. Dann existiert eine Σ_n - Y
 Funktion f mit $\text{dom } f \subseteq e_0$ und $\text{rg } f = Y \supset e$. Also ist
 $\text{enp}^Y(e) \neq e_0$ und damit $\tilde{e} < \gamma+1$, d.h. $c(e) = \tilde{e}$.

Es ist leicht zu sehen, dass jedes $x \in L_\beta$ eine Σ_n Definition
 ueber L_β mit Parametern aus $\bar{p} \cup \{p_1, \dots, p_n\}$ hat. Die
 Parameter aus $\bar{p}$ koennen $\mathcal{A}$ -pstab gewaehlt werden und man
 kann wieder minimale Spuren definieren.

Beweis des Satzes im Fall 2 :

Sei wieder $f : \delta \longleftrightarrow X \subset \bar{p}$ eine $\mathcal{A}$ -rek Aufzaehlung, $\delta < \bar{p}$. Falls $\bar{p} \in \Sigma_n^A$ regulaer ist, ist $X = \text{rg } f$ beschaenkt in $\bar{p}$ und damit β -finit (und damit sogar $\bar{p}$ -finit wegen (RP_β)) wegen Σ_n Separation unterhalb $\bar{p}$.

Sei also $\text{oBdA } \bar{p} \in \Sigma_n^A$ irregulaer. Man zeigt leicht, dass $\bar{p}$ dann das Supremum kleinerer β -KardZ ist; sei deshalb α eine β -KardZ mit $X \subset H := \text{SH}_1(\alpha, p_n; \mathcal{A}) \cap \bar{p}$, α genuegend gross. Es genuegt zu zeigen, dass H $\mathcal{A}$ -rek ist.

Mit der Bemerkung nach Lemma 2 gilt

$$\forall x < \bar{p} \quad (x \in H \longleftrightarrow \text{mS}(x) \in L_\alpha).$$

Definiere $T^\sigma(x)$ und $X^\sigma(x)$ ganz analog zu Kap.2 :

$$T^\sigma(x) := \{ \varphi(v) \mid \varphi \in \Sigma_1 \text{ Fml mit Para. aus } \alpha \cup \{p_n\} \text{ \& } \mathcal{A}_\sigma \models \varphi(x) \}$$

$$X^\sigma(x) := \text{SH}_1(\alpha, (x, p_n); \mathcal{A}_\sigma).$$

Offenbar ist $T^\sigma(x) = T^\sigma(\bar{x})$ gdw $X^\sigma(x) \cong X^\sigma(\bar{x})$.

Ferner ist fuer ein $\sigma < \bar{\kappa}$ $\text{mS}(x) \in X^\sigma(x)$ und es genuegt deshalb wieder zu zeigen, dass alle $e < \bar{p}$, e $\mathcal{A}$ -pstab unterscheidbar sind.

Wir zeigen hier nur exemplarisch, dass jede N - $\mathcal{A}$ -pstab e , $e < \bar{p}$, unterscheidbar ist.

Wegen $c(e) = \bar{e} \in X^0(e)$ genuegt es zu zeigen, dass $H \cap e \subset X^0(y)$, $y := c(e)$. Sei also $a \in H \cap e$, $h_{p_n}(1, e_a) \approx a$ fuer ein $e_a < \alpha$.

Dann gibt es eine Σ_n Definition $\Phi(u)$ von a mit Parametern $e_a, p_1, \dots, p_n$. Sei $Y <_n L_\beta$ wie oben, es gilt

$$Y \models \exists x \Phi(x, e_a, p_1, \dots, p_n) \quad \text{also mit } \bar{p}_1 := \pi(p_1)$$

$$L_Y \models \exists x \Phi(x, e_a, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n) \quad \text{es folgt}$$

$$X^0(y) \models (\exists x (L_Y \models \Phi(x, e_a, \bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n)))$$

und aus Eindeutigkeitsueberlegungen folgt $a \in X^0(y)$.

Also uebertraegt sich Lemma 2.3.1 und ganz analog fuer Lemma 2.3.2 .



KAPITEL 4

ANWENDUNGEN : FRIEDBERG-SPLITTING UND MAXIMALE MENGEN

(4.0) FRIEDBERG-SPLITTING

Friedberg hat im Rahmen der klassischen Rekursionstheorie gezeigt, dass jede rekursiv-aufzählbare nicht-rekursive Menge in zwei disjunkte rekursiv-aufzählbare nicht-rekursive Mengen gespalten werden kann. Dieses Resultat wurde von Machtey auf adm. α mit $\alpha^* = \omega$ und schliesslich von Lerman auf beliebige adm. α verallgemeinert. Wir zeigen im Folgenden, dass es fuer beliebige β gueltig ist.

Satz : Friedberg-Splitting

Sei β beliebig, $A \in L_\beta$ β -ra aber nicht β -rek.

Dann existiert A_1 β -ra nicht β -rek, $i=0,1$, mit:

$$A = A_0 \cup A_1 \quad \text{und} \quad A_0 \cap A_1 = \emptyset.$$

Beweis:

Friedberg-Splitting kann offenbar in der Sprache der Verbandstheorie ueber $\mathcal{E}_\beta$ ausgedrueckt werden, es genuegt deshalb zu zeigen, dass es ueber $\mathcal{E}_\beta(\hat{\beta}) \cong \mathcal{E}_\beta$ gilt.

Fuer w.adm. β ist $\mathcal{E}_\beta(\kappa) \cong \mathcal{E}_{\alpha_\beta}$, α_β der Maass-Kollaps von L_β .

Es ist leicht zu sehen, dass sich der Beweis fuer adm.

auf die Strukturen α_β uebertraegt. Sei deshalb oBdA

β s.inad., also $\hat{\beta} = \beta^* > \kappa$.

Wie eben gezeigt koennen wir annehmen, dass $A \in \beta^*$.

Wir konstruieren A_0 und A_1 in κ -vielen Stufen zu jeweils hoechstens β^* -vielen Schritten.

Sei zunaechst ($W_e \mid e < \beta^*$) die uebliche Aufzaehlung der β -ra Teilmengen von β^* . Sei $W_e^\sigma := \{x < \beta^* \mid L_q(\sigma) \models x \in W_e\}$ fuer $e < \beta^*$, $\sigma < \kappa$.

Wir schreiben A^σ statt $W_{\bar{e}}^\sigma$ wo $W_{\bar{e}} = A$ (sei etwa $\bar{e} < \beta^*$ minimal mit $W_{\bar{e}} = A$).

Sei $\theta_\sigma := \text{otp}(A^{\sigma+1} - A^\sigma)$ und fuer $j < \theta_\sigma$ sei
 $a^\sigma(j) :=$ das j -te Element von $A^{\sigma+1} - A^\sigma$. Wegen q
 streng monoton und stetig ist $A = \{a^\sigma(j) \mid \sigma < \kappa, j < \theta_\sigma\}$.
 Ferner ist $\theta_\sigma \leq \text{otp } A \leq \beta^*$.

Auf Stufe $\sigma < \kappa$ fuehren wir genau θ_σ -viele Schritte $j < \theta_\sigma$ aus.
 Sei $A_i(<\sigma, j)$ der Teil von A_i , der vor Schritt j auf Stufe
 konstruiert wurde, d.h. entweder auf einer Stufe $\tau < \sigma$ oder
 auf Stufe σ aber bei Schritt $j' < j$.

Um zu erreichen, dass $A = A_0 \cup A_1$ und $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ werden wir
 auf Stufe σ , Schritt $j < \theta_\sigma$ $a^\sigma(j)$ entweder in A_0 oder in A_1
 werfen. Wir muessen sicherstellen, dass A_i nicht β -rek ist.
 Betrachte dazu die folgenden Erfordernisse $R_{i,e}$:

$R_{i,e} : W_e \cap A_i \neq \emptyset \quad i < 2, e < \beta^*.$

Wohlordne die $R_{i,e}$ per $R_{i,e} < R_{k,l}$ gdw $e < l$ oder $(e=l \ \& \ i < k)$.
 Wir sagen in diesem Fall, dass $R_{i,e}$ hoehere Prioritaet hat
 als $R_{k,l}$.

$R_{i,e}$ erfordert Aufmerksamkeit bei Stufe σ , Schritt j falls
 $a^\sigma(j) \in W_e$ und $A_i(<\sigma, j) \cap W_e = \emptyset$.

Konstruktion :

Sei $A_i(<0, 0) := \emptyset$.

Betrachte Stufe $\sigma < \kappa$, Schritt $j < \theta_\sigma$.

Sei $R_{i,e}$ das Erforderniss der hoechsten Prioritaet, das
 auf Stufe σ , Schritt j Aufmerksamkeit erfordert.

Wirf $a^\sigma(j)$ in $A_1 (*)$.

Wirf $a^\sigma(j)$ in A_0 , falls kein solches Erforderniss existiert.

Sei $A_i := \bigcup \{A_i(<\sigma, j) \mid \sigma < \kappa, j < \theta_\sigma\}$.

Wir sagen im Fall (*), dass $R_{i,e}$ bei σ, j Aufmerksamkeit er-
 haelt. Beachte, dass jedes Erforderniss hoechstens einmal
 und viele ueberhaupt nie Aufmerksamkeit erhalten.

Die obige Konstruktion kann offenbar als Σ_1 Formel ueber
 L_β aufgefasst werden, also sind die A_i β -ra und es ist nach
 Konstruktion $A = A_0 \cup A_1$ und $A_0 \cap A_1 = \emptyset$.

Wir haben zu zeigen, dass A_1 nicht β -rek ist, $i = 0, 1$.
 Betrachte dazu die folgende Funktion $r : 2^{\beta^*} \rightarrow \beta^*$
 $r(i, e) \approx x \iff x = a^\sigma(j)$ und $R_{1,e}$ erhaelt Aufmkt. bei
 Stufe $\sigma < \kappa$, $j < \theta_\sigma$.

r ist partiell β -rek.

Annahme: A_0 ist β -rek.

Dann existiert ein $\nu < \beta^*$ mit $\beta^* - A_0 = W_\nu$. Sei $\gamma < \beta^*$
 β -pseudo-stabil mit $\nu, \kappa < \gamma$ und fuer ein $c < \gamma$ ist
 $r \upharpoonright \Sigma_1^\beta - \{c, p(\beta)\}$.

Sei $H := SH_1(\gamma, p(\beta); L_\beta) \cap \beta^*$.

Nach Satz 2.0.2 ist H 1-finit. Also ist $A \cap H$ 1-finit und
 damit β -rek.

Sei jetzt $B := \beta^* - (A_0 \cup H)$, also ist nach unserer Ann.
 B β -rek und $B \subset W_\nu$. Sei deshalb fuer $x \in \beta^*$

$$st(x) := \begin{cases} \min(\sigma < \kappa \mid x \in W_\nu^\sigma) & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

st ist β -rek und es ist $rg \ st < \kappa$.

Behauptung: $x \in A \cap B \rightarrow x \in A^{st(x)}$.

Andernfalls gaebe es ein x mit $x \in A$, $x \notin A_0$, $x \notin H$ und $x \notin A^{st(x)}$.

Aber dann ist fuer ein $\tau \geq st(x)$ $x \in A^{\tau+1} - A^\tau$, also fuer
 ein $j < \theta_\tau$ $x = a^\tau(j)$. Betrachte Stufe τ , Schritt j . Es ist
 $x \notin A_0$, also $x \in W_\nu^{st(x)} \subset W_\nu^\tau$ und $A_0(\leq \tau, j) \cap W_\nu^\tau \subset A_0 \cap W_\nu = \emptyset$.

Also erfordert $R_{0,\nu}$ Aufmkt. bei τ, j und ein Erforderniss
 $R \prec R_{0,\nu}$ erhaelt Aufmkt. nach Konstruktion. Sei $R = R_{k,\delta}$.
 Nach Definition von r ist dann $r(k, \delta) \approx x$.

Aber $(k, \delta) \in L_\gamma$ weil $\delta \in \nu < \gamma$ und $L_\gamma \subset SH_1(\gamma, p(\beta); L_\beta)$,
 d.h. $x \in H$, Widerspruch.

Aus der Beh. folgt sofort dass

$x \in A$ gdw $x \in A_0$ oder $x \in A \cap H$ oder $(x \in B \ \& \ x \in A^{st(x)})$.
 Also ist A β -rek. Widerspruch.

Ganz analog zeigt man, dass A_1 nicht β -rek sein kann.



(4.1) MAXIMALE MENGEN

Wir haben in Kap.2 ein Resultat von Lerman verallgemeinert um zu zeigen, dass fuer w.adm. β β -maximale Mengen genau dann existieren, wenn $s3p^\beta(\beta) = \omega$. Wir geben im Folgenden zwei Nicht-Existenz Resultate fuer maximale Mengen im s. inad. Fall. Es ist unbekannt, ob fuer irgendein s.inad. eine β -maximale Menge existiert. Beachte, dass aus $s3p^\beta(\beta) = \omega$ schon β w.adm. folgt.

Das folgende Lemma geht auf ein Argument von Sacks zurueck, das zeigt, dass fuer $\aleph_1$ keine maximale Mengen existieren.

Lemma :

Sei β s.inad. und β^* eine Σ_3^A regulaere Nachfolger- β -KardZ. Dann existieren keine β -maximalen Mengen.

Beweis:

Annahme: M ist β -maximal.

Wegen $\mathcal{E}_\beta \equiv \mathcal{E}_\beta(\beta^*)$ koennen wir oBdA annehmen, dass $L_\beta - M =: \bar{M}$ Teilmenge von β^* ist. Sei ρ die groesste β -KardZ kleiner als β^* , also $\rho^+ = \beta^*$. Sei $(S_i \mid i < \beta^*)$ β -finite Aufzaehlung der β -Potenzmenge von ρ , d.h. $S_i \subset \rho$ ist β -finit fuer jedes $i < \beta^*$ und umgekehrt existiert fuer jedes $S \subset \rho$, S β -finit, genau ein $i < \beta^*$ mit $S = S_i$.

Fuer $x < \rho$ sei $C_x := \{i < \beta^* \mid x \in S_i\}$. $(C_x \mid x < \rho)$ ist ebenfalls β -finit und die C_x sind β -finit, also insbesondere β -ra.

β^* ist nach Vor. Σ_3^A regulaer, nach Lemma 2.0.2 folgt, dass die l-finiten Teilmengen von β^* beschraenkt sind in β^* . Mit M maximal folgt

$\forall x < \rho \exists y < \beta^* (\bar{M} \cap C_x \subset y \text{ oder } \bar{M} \cap \bar{C}_x \subset y)$.

$\bar{M} \cap C_x \subset y$ bzw. $\bar{M} \cap \bar{C}_x \subset y$ ist ein π_2 - L_β Relation von x, y .

Nach dem Uniformisierungssatz von Jensen folgt : es gibt eine Σ_3 - L_β Funktion f mit $\text{dom } f = \rho$ und

$\forall x < \rho (\bar{M} \cap C_x \subset f(x) \text{ oder } \bar{M} \cap \bar{C}_x \subset f(x))$.

β^* ist Σ_3 regulaer, also existiert ein $\gamma < \beta^*$ mit $\text{rg } f < \gamma$.
 $\bar{M}$ muss unbeschaenkt sein in β^* weil sonst $\bar{M}$ 1-finit waere.
 Waehle deshalb $i, j \in \bar{M}$ mit $\gamma < i < j$. Dann gilt
 $\forall x < \rho \ (x \in S_i \ \& \ x \in S_j) \text{ oder } (x \notin S_i \ \& \ x \notin S_j)$.
 Aber das heisst $S_i = S_j$. Widerspruch.



Lemma :

Sei β s.inad. und $\sigma \text{ lcf } \beta^* < \sigma_2 p \beta$.

Dann existieren keine β -maximalen Mengen.

Beweis:

Annahme: M ist β -maximal.

Sei wieder oBdA $\bar{M} \subset \beta^*$.

Sei $\lambda := \sigma \text{ lcf } \beta^* < \sigma_2 p \beta \leq \beta^*$. Wie in Kap.2 sei $(\alpha_v \mid v < \lambda)$ eine β -ra Folge von β -KardZ, streng monoton und mit Supremum β^* . Fuer $v < \lambda$ sei wieder

$$H_v := SH_1(\alpha_v, p(\beta); L_\beta) \cap \beta^*.$$

Wir haben in Kap.2 gezeigt, dass die H_v die folgende Ueberdeckungseigenschaft haben:

$$(\#) \ X \subset \beta^* \ \beta\text{-ra ist 1-finit gdw } \exists v < \lambda (X \subset H_v).$$

M ist nicht 1-finit nach Vor., deshalb gilt $\forall v < \lambda (\bar{M} \not\subset H_v)$.
 Denn sonst waere $M = \bar{H}_v \cup (H_v \cap M)$ und damit β -rek nach (#).
 Aber dann ist auch $\bar{M}$ β -rek und damit 1-finit wieder nach (#).

Betrachte deshalb das folgende zwei-stellige Praedikat $R \subset \lambda \times \lambda$
 $R(v, \mu) := \iff \exists x (\alpha_\mu < x < \alpha_{\mu+1} \ \& \ x \in \bar{M} \cap \bar{H}_v)$.

R ist offenbar Σ_2 -L_β und damit β -finit : $\lambda < \sigma_2 p \beta$ und unterhalb von $\sigma_2 p \beta$ gilt Σ_2 Separation.

Ferner ist $\text{dom } R = \lambda$, sei deshalb $f : \lambda \rightarrow \lambda$,

$f(v) := \min(\mu < \lambda \mid R(v, \mu))$. Sei $T := \text{rg } f$; T und f sind β -finit und wegen $\alpha_v \in H_v$ ist $T \subset \lambda$ unbeschaenkt. λ ist nach Definition eine regulaere β -KardZ, also ist $\text{otp } T = \lambda$, sei darum $T = \{\mu_i \mid i < \lambda\}$ mit $i < j \rightarrow \mu_i < \mu_j$.

Setze $X := \bigcup \{ [\alpha_{\mu_{2i}}, \alpha_{\mu_{2i+1}}[\mid i < \lambda \} \subset \beta^*$.

X ist β -ra und in vielen Faellen sogar β -finit.

Behauptung : $X \cap \bar{M}$ ist nicht 1-finit.

Annahme: $X \cap \bar{M}$ ist 1-finit.

Nach (#) existiert dann ein $\nu < \lambda$ mit $X \cap \bar{M} \subset H_\nu$.

Wähle ein $\bar{\nu} \geq \nu$ mit $f(\bar{\nu}) = \mu_{21}$. Es ist $H_\nu \subset H_{\bar{\nu}}$ und damit $X \cap \bar{M} \cap \bar{H}_{\bar{\nu}} = \emptyset$. Andererseits ist

$[\alpha_{\mu_{2i}}, \alpha_{\mu_{2i+1}}] \cap \bar{M} \cap \bar{H}_{\bar{\nu}} \neq \emptyset$ nach Definition von f und

weil $\alpha_{\mu_{2i+1}} \geq \alpha_{\mu_{2i}} + 1$. Also $X \cap \bar{M} \cap \bar{H}_{\bar{\nu}} \neq \emptyset$. Widerspruch.

Ganz analog zeigt man, dass $\bar{X} \cap \bar{M}$ nicht 1-finit sein kann.

Also spaltet eine β -ra Menge $\bar{M}$ in zwei nicht 1-finite Teile im Widerspruch zur Maximalität von M .



Korollar :

Sei $\beta^* =: \aleph$ eine Kardinalzahl (in L , nicht in L_β), $\aleph > \omega$.

Dann existieren keine β -maximale Mengen falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist :

- $\aleph$ ist Nachfolgerkardinalzahl
- $\aleph$ ist Σ_1^β irregulär .

Beweis:

Falls β w.adm. ist, ist $\text{s3p } \beta = \text{s3p } \aleph = \aleph > \omega$ und die Beh. folgt aus Kap.1 .

Falls β s.inad. ist im ersten Fall $\aleph \Sigma_3^\beta$ regulär, im zweiten Fall $\text{clcf}^\beta(\aleph) < \aleph = \text{op } \beta$ und die Beh. folgt aus den beiden letzten Lemmata.



Bemerkung :

Es ist unbekannt, ob im Fall $\aleph \beta$ -reguläre Limeskardinalzahl maximale Mengen existieren.

LITERATURVERZEICHNIS

- D1 K.J. Devlin, Aspects of constructibility, Lecture Notes in Math., vol. 354, Springer Verlag, Berlin 1973.
- D2 _____, Constructibility, in: J.K. Barwise (ed.), Handbook of Math. Logic, North-Holland, Amsterdam 1977.
- F1 S.D. Friedman, β -recursion theory, Trans. Am. Math. Soc., 255 (1979) 173-200.
- F2 _____, Post's problem without admissibility, Adv. in Math., 35 (1980) 30-49.
- F3 _____, Negative solutions to Post's problem II, Ann. of Math., 113 (1981) 25-43.
- L1 M. Lerman, Congruence relations, filters, ideals and definability in lattices of α -re sets, J. Symb. Logic 41 (1976) 405-418.
- L2 _____, Ideals of generalized finite sets in the lattice of α -re sets, Zeit. Math. Logik Grundlagen der Math. 22 (1976).
- L3 _____, Maximal α -re sets, Trans. Am. Math. Soc., 188 (1974) 341-386.
- M1 W. Maass, Inadmissibility, tame r.e. sets and the admissible collapse, Ann. Math. Logic, 13 (1978) 149-170.
- M2 _____, Recursively invariant β -recursion theory, Ann. Math. Logic, 21 (1981) 27-73.
- O J.C. Owings, Recursion, metarecursion and inclusion, J. Symb. Logic, 32 (1967) 173-179.
- S S.G. Simpson, Short course in admissible recursion theory, in: J. Fenstad, G. Sacks (eds.), Generalized Recursion Theory II, North-Holland, Amsterdam 1978.

LEBENS LAUF K. SUTNER

- 1954 Geboren am 4. Oktober 1954 in Kempfenhausen
in Oberbayern als Sohn von Walter Sutner
und Margarete Sutner, geb. Hauser.
- 1960-73 Besuch von Volksschule und Gymnasium
in München.
- 1973-79 Studium der Mathematik und Informatik an
der Ludwig Maximilians Universität in
München.
- 1979-82 Promotionsstudium daselbst.
- 1982/83 Studium der Mathematik und Computer Science
an der University of California at Berkeley.
- ab 1983 Assistant professor für Mathematik und
Computer Science am Stevens Institute of
Technology, Hoboken, New Jersey.

München, Juni 1984

